

Math.u.

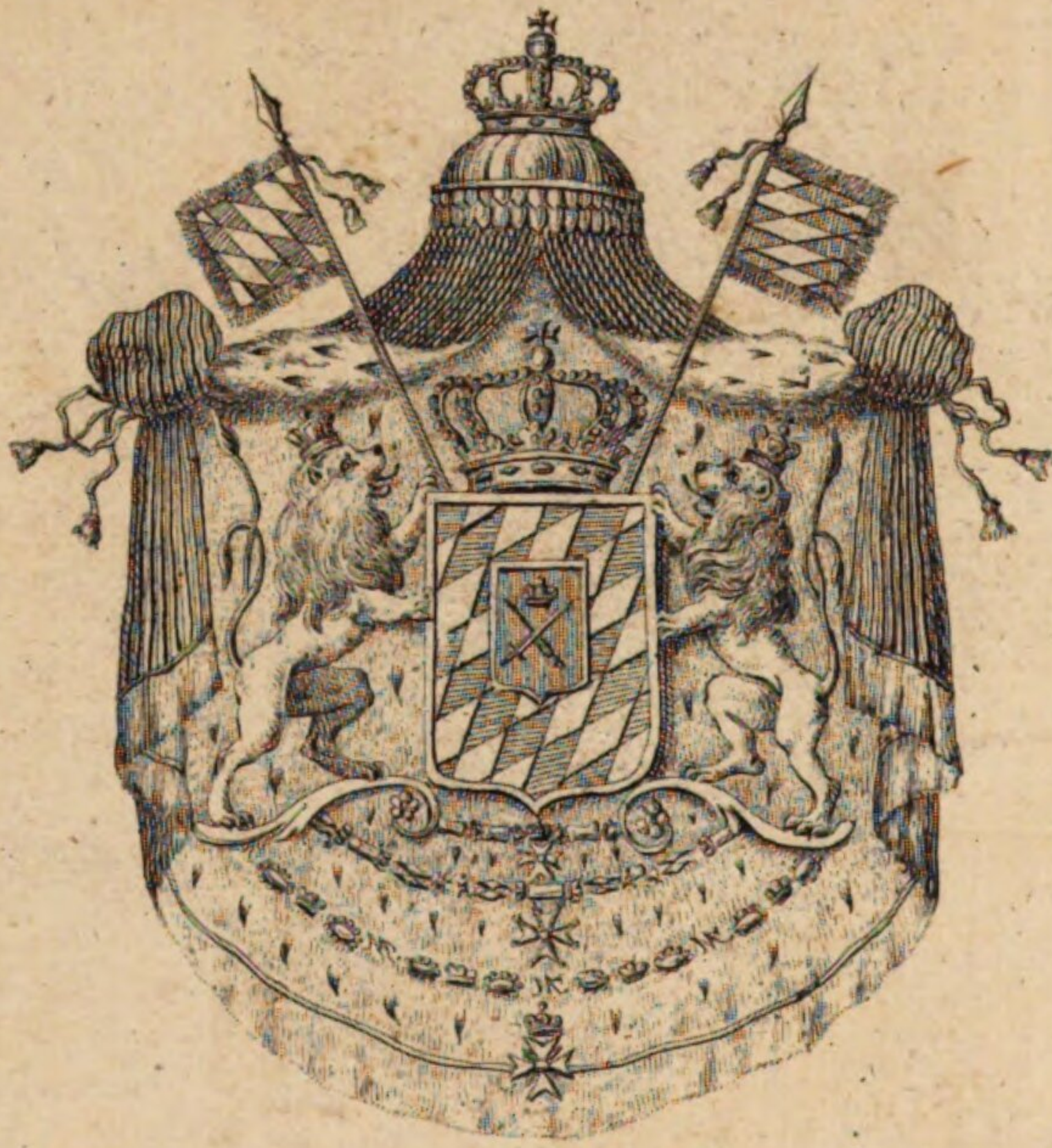
40

38

n-1

Math. lin.
38a - 1

Gumpert



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36636489060010

<36636489060010

Bayer. Staatsbibliothek

Beiträge

zur

reinen und angewandten *Mathematik*

von

Johann August Grunert,

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der *Mathematik* an der
Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie
der Wissenschaften zu Erfurt und der Gesellschaft zur Verbreitung der ma-
thematischen Wissenschaften zu Hamburg.

Erster Theil.

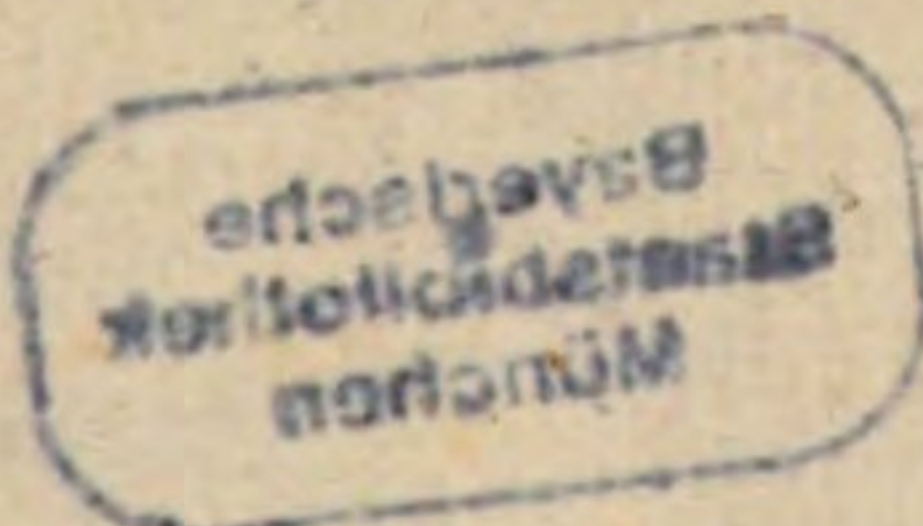
Mit zwei Figurentafeln.

Brandenburg,

bei J. J. Wiesike.

1838.

170. D.



Beiträge

reinen und angewandten Mathematik

John von Neumann

Professor der Philosophie und mathematischen Professor der Naturwissenschaften an der Universität zu Göttingen, Ehrenmitglied der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin und der Gesellschaft zur Förderung der mathematischen Wissenschaften zu Bonn.

Erster Teil
Mit zwei Figurentafeln

Verlag von
J. Neumann, Neudamm

1888



V o r r e d e.

Ich habe bei der Herausgabe dieses Werkes einen doppelten Zweck. Zunächst will ich durch dasselbe verschiedene von mir angestellte mathematische Untersuchungen zur Kenntniss des Publikums bringen, und wünsche, dass jede Abhandlung entweder durch Neuheit der Methode oder durch Neuheit der Resultate das Interesse des Lesers in Anspruch zu nehmen geeignet seyn möge. Über die einzelnen Abhandlungen hier etwas zu sagen, würde völlig überflüssig und unnöthig seyn, da einige einleitende Worte, welche einer jeden Abhandlung vorangestellt sind, dem Leser sagen, was er zu erwarten hat, wodurch der Verfasser zur Abfassung der Abhandlung veranlasst worden ist, und welchen Zweck er durch dieselbe zu erreichen gesucht hat. Ausser der so eben angedeuteten Absicht hatte ich aber bei der Herausgabe dieses Werkes noch eine andere. Die meisten der in diesem ersten Theile mitgetheilten Untersuchungen sind mit Hülfe der allgemeinen Formeln der neuern analytischen Geometrie geführt, und betreffen zum Theil Gegenstände, welche von einer gewissen praktischen Bedeutung sind. Die Abhandlungen, welche diese Untersuchungen enthalten, sollen nach meinem Wunsche zugleich angehenden Mathematikern zur Übung in der analytischen Geometrie, diesem schönen, immer noch nicht so allgemein, wie es wohl zu wünschen wäre, gekannten Theile der neuern Mathematik, dienen, und sind von mir, indem ich diesen Zweck stets vor Augen hatte, ausgearbeitet worden. Wie nöthig Übungen dieser Art für angehende Mathematiker sind, weiss ich aus vielfacher Erfahrung; zugleich aber hat mich auch die Erfahrung gelehrt, dass diese Übungen bei vielen Individuen sehr an Interesse gewinnen, wenn die Untersuchung einen Gegenstand verfolgt, der in irgend einer Beziehung von praktischer Bedeutung ist, wobei es aber nicht im Entferntesten meine Absicht ist, den rein geo-

metrischen Untersuchungen ihren grossen Werth nur im Geringsten zu schmälern. Dass übrigens diese Beiträge zur Mathematik nicht alle gleichen Werth haben, weiss ich selbst nur zu gut, und möchte fast den Leser wegen Mittheilung des einen oder des andern, wie z. B. des kleinen Aufsatzes über Theorie und Gebrauch der Libelle, um Verzeihung bitten; indess hat mich, was den genannten kleinen Aufsatz betrifft, die Erfahrung gelehrt, dass Anfänger von der Theorie der Libelle oft sehr unrichtige und dunkelo Begriffe haben, und dass auch die Darstellung derselben in vielen Lehrbüchern nicht alle wünschenswerthe Klarheit hat, welches die Veranlassung zur Abfassung und Mittheilung des kleinen Aufsatzes über das in Rede stehende so überaus wichtige geodätische und astronomische Instrument gewesen ist. Rücksichtlich des Aufsatzes II. über das Kepler'sche Problem habe ich noch zu bemerken, dass in diesem Aufsatz von mir unterlassen worden ist, den Leser darauf hinzuweisen, dass sich auch in der zehnten Abhandlung auf Seite 219 in einer Note noch eine vielleicht einige Beachtung verdienende Bemerkung über die Kepler'sche Aufgabe findet.

Eine Fortsetzung dieses Werkes, welches übrigens durch seinen Titel keineswegs an ein älteres treffliches Werk eines der berühmtesten und scharfsinnigsten deutschen Mathematiker, das denselben Titel führt, erinnern soll, wird erscheinen, wenn der vorliegende erste Theil das Glück haben sollte, sich einer nachsichtigen Aufnahme zu erfreuen.

Greifswald im December 1837.

Der Verfasser.

I n h a l t.

	Seite
I. Neuer Beweis des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte	1
II. Über das <i>Kepler'sche</i> Problem	7
III. Über einen Satz von den Kettenbrüchen	16
IV. Über einen von <i>Wallis</i> gefundenen Satz von den Kettenbrüchen und über die von <i>Brouncker</i> und <i>Wallis</i> gefundenen Ausdrücke für die Peripherie des Kreises	26
V. Über die grösste Ellipse, welche drei oder vier der Lage nach gegebene gerade Linien berührt	41
VI. Über Theorie und Gebrauch der Libelle	81
VII. Theorie des Spiegelsextanten	89
VIII. Zur Krystallographie und analytischen Geometrie (Erster Beitrag)	149
IX. Über die Aufgabe, die Entfernung eines Weltkörpers von der Erde zu bestimmen	162
X. Über die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte und über die Berech- nung der Bahnen der Doppelsterne	169
<i>A.</i> Über die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte	169
<i>B.</i> Über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne	203
XI. Bemerkungen über den elementaren Vortrag der Lehre von den Kegelschnitten	222

Inhalt

I	Einleitung	1
II	Die Geschichte der Stadt	10
III	Die Verwaltung der Stadt	20
IV	Die Wirtschaft der Stadt	30
V	Die Kultur der Stadt	40
VI	Die Religion der Stadt	50
VII	Die Wissenschaft der Stadt	60
VIII	Die Kunst der Stadt	70
IX	Die Literatur der Stadt	80
X	Die Musik der Stadt	90
XI	Die Theater der Stadt	100
XII	Die Sport der Stadt	110
XIII	Die Freizeit der Stadt	120
XIV	Die Familie der Stadt	130
XV	Die Jugend der Stadt	140
XVI	Die Alten der Stadt	150
XVII	Die Kranken der Stadt	160
XVIII	Die Toten der Stadt	170
XIX	Die Fremden der Stadt	180
XX	Die Ausländer der Stadt	190
XXI	Die Völker der Stadt	200
XXII	Die Nationen der Stadt	210
XXIII	Die Religionen der Stadt	220
XXIV	Die Philosophen der Stadt	230
XXV	Die Dichter der Stadt	240
XXVI	Die Künstler der Stadt	250
XXVII	Die Gelehrten der Stadt	260
XXVIII	Die Staatsmänner der Stadt	270
XXIX	Die Soldaten der Stadt	280
XXX	Die Beamten der Stadt	290
XXXI	Die Richter der Stadt	300
XXXII	Die Advokaten der Stadt	310
XXXIII	Die Anwälte der Stadt	320
XXXIV	Die Ärzte der Stadt	330
XXXV	Die Apotheker der Stadt	340
XXXVI	Die Barbier der Stadt	350
XXXVII	Die Schneider der Stadt	360
XXXVIII	Die Fleischer der Stadt	370
XXXIX	Die Bäcker der Stadt	380
XL	Die Metzger der Stadt	390
XLI	Die Fischer der Stadt	400
XLII	Die Jäger der Stadt	410
XLIII	Die Hirten der Stadt	420
XLIV	Die Arbeiter der Stadt	430
XLV	Die Handwerker der Stadt	440
XLVI	Die Kaufleute der Stadt	450
XLVII	Die Händler der Stadt	460
XLVIII	Die Bankiers der Stadt	470
XLIX	Die Geldverleiher der Stadt	480
L	Die Wucherer der Stadt	490
LI	Die Diebe der Stadt	500
LII	Die Betrüger der Stadt	510
LIII	Die Schwindler der Stadt	520
LIV	Die Betrüger der Stadt	530
LV	Die Schwindler der Stadt	540
LVI	Die Betrüger der Stadt	550
LVII	Die Schwindler der Stadt	560
LVIII	Die Betrüger der Stadt	570
LIX	Die Schwindler der Stadt	580
LX	Die Betrüger der Stadt	590
LXI	Die Schwindler der Stadt	600
LXII	Die Betrüger der Stadt	610
LXIII	Die Schwindler der Stadt	620
LXIV	Die Betrüger der Stadt	630
LXV	Die Schwindler der Stadt	640
LXVI	Die Betrüger der Stadt	650
LXVII	Die Schwindler der Stadt	660
LXVIII	Die Betrüger der Stadt	670
LXIX	Die Schwindler der Stadt	680
LXX	Die Betrüger der Stadt	690
LXXI	Die Schwindler der Stadt	700
LXXII	Die Betrüger der Stadt	710
LXXIII	Die Schwindler der Stadt	720
LXXIV	Die Betrüger der Stadt	730
LXXV	Die Schwindler der Stadt	740
LXXVI	Die Betrüger der Stadt	750
LXXVII	Die Schwindler der Stadt	760
LXXVIII	Die Betrüger der Stadt	770
LXXIX	Die Schwindler der Stadt	780
LXXX	Die Betrüger der Stadt	790
LXXXI	Die Schwindler der Stadt	800
LXXXII	Die Betrüger der Stadt	810
LXXXIII	Die Schwindler der Stadt	820
LXXXIV	Die Betrüger der Stadt	830
LXXXV	Die Schwindler der Stadt	840
LXXXVI	Die Betrüger der Stadt	850
LXXXVII	Die Schwindler der Stadt	860
LXXXVIII	Die Betrüger der Stadt	870
LXXXIX	Die Schwindler der Stadt	880
LXXXX	Die Betrüger der Stadt	890
LXXXXI	Die Schwindler der Stadt	900
LXXXXII	Die Betrüger der Stadt	910
LXXXXIII	Die Schwindler der Stadt	920
LXXXXIV	Die Betrüger der Stadt	930
LXXXXV	Die Schwindler der Stadt	940
LXXXXVI	Die Betrüger der Stadt	950
LXXXXVII	Die Schwindler der Stadt	960
LXXXXVIII	Die Betrüger der Stadt	970
LXXXXIX	Die Schwindler der Stadt	980
LXXXXX	Die Betrüger der Stadt	990
LXXXXXI	Die Schwindler der Stadt	1000

I.

Neuer Beweis des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte.

1.

Aus *Poisson's* trefflichem Werke über die Mechanik ist bekannt, dass sich der Satz vom Parallelogramme der Kräfte in völliger Allgemeinheit und auf ganz elementare Weise streng beweisen lässt, wenn man dieses wichtige Theorem in dem besondern Falle zweier auf einen Punkt wirkenden einander gleichen Kräfte beweisen kann, indem die Art, wie *Poisson* von diesem speciellen Falle zu dem allgemeinen Satze übergeht, wohl schwerlich in irgend einer Beziehung noch Etwas zu wünschen übrig lassen dürfte. In der ältern Ausgabe seines Werks beweiset *Poisson* den Satz in dem in Rede stehenden besondern Falle mit Hülfe der Differentialrechnung, namentlich mittelst des Taylor'schen Theorems und der bekannten unendlichen Reihe für den Cosinus, hat aber dafür in der neuen Ausgabe eine elementare Darstellung substituiert, die, wie es sich bei einem Mathematiker wie *Poisson* von selbst versteht, völlig streng ist, rücksichtlich der Einfachheit und Eleganz jedoch vielleicht noch Einiges zu wünschen übrig lassen dürfte. *Pontécoulant* geht in seiner trefflichen *Théorie analytique du système du monde*, wie *Laplace* in der *Mécanique céleste*, von auf einander senkrechten Kräften aus, und bedient sich ebenfalls der Differentialrechnung. Ausser *Poisson's* älterm Beweise ist vorzüglich der elementare Beweis von *Duchayla* bekannt geworden, der selbst in einige Lehrbücher der Naturlehre übergegangen ist, in neuerer Zeit aber, und, wie wir glauben, nicht mit Unrecht, von einigen gründlichen deutschen Mathematikern manche Widersprüche erfahren hat. Zwei sehr schöne, ebenfalls völlig elementare von *Cauchy* in seinen *Exercices de Mathématiques. Livr. 2. Paris 1826.* gegebene Beweise scheinen nicht so bekannt geworden zu seyn, wie sie es verdienen *); jedoch nimmt der erste dieser Beweise stereo-

*) Hätte z. B. Herr Professor *Kayser* in Carlsruhe diese Beweise gekannt; so würde er gewiss einen derselben statt des grösstentheils aus meiner *Statik fester Körper (Halle 1826)* entlehnten, ebenfalls die unendlichen Reihen voraussetzenden Beweises, den u. A. auch *Brix* in seinem ausgezeichneten *Elementar-Lehrbuche der Statik fester Körper. Erste Abth. Berlin 1831. §. 31.* mitgetheilt hat, in sein sonst treffliches, vorzüglich Praktikern in jeder Beziehung sehr zu empfehlendes *Handbuch der Statik mit Beziehung auf ihre Anwendung. Carlsruhe 1836.* aufgenommen haben. Wenigstens würde ich selbst jetzt an die Stelle der in meinem genannten Buche von mir gegebenen Beweise entweder einen der beiden Beweise von *Cauchy*, oder den im vorliegenden Aufsätze gegebenen Beweis setzen.

metrische Betrachtungen zu Hülfe, und auch der zweite scheint uns nicht so einfach zu seyn wie der Beweis, den wir in diesem Aufsatze, mit Uebergang alles sonst Bekannten, für den Fall zweier einander gleichen Kräfte zu geben versuchen wollen, von dem man dann zu dem allgemeinen Satze ganz auf dieselbe Art wie in *Poisson's* trefflichem Werke übergehen kann.

2.

Die beiden folgenden äusserst leicht zu beweisenden Sätze, die sich in jedem Lehrbuche der Statik finden, setzen wir als bekannt voraus.

I. Die Richtung der Resultirenden zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte geht jederzeit durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt dieser beiden Kräfte und liegt in der durch die Richtungen derselben bestimmten Ebene.

II. Wenn R die Resultirende zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte P, Q ist; so ist, unter Voraussetzung völlig unveränderter Richtungen aller Kräfte, wenn n eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl bezeichnet, nR die Resultirende der beiden Kräfte nP, nQ .

Als bekannt setzen wir ferner auch noch voraus, was man unter der geometrischen Darstellung einer Kraft zu verstehen hat. Unter dem Richtungswinkel zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte soll im Folgenden immer der von den Richtungen dieser Kräfte eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel verstanden werden.

3.

Wir wollen nun annehmen, dass R die Resultirende der auf den Punkt A (Fig. 1.) nach den Richtungen AB, AC wirkenden Kräfte P, Q , und dass AD die Richtung dieser Resultirenden sey; so ist nach dem Satze 2. *II.* die nach AD wirkende Kraft

$$R \cdot \frac{P}{R} = P$$

die Resultirende der nach AB, AC wirkenden Kräfte

$$P \cdot \frac{P}{R} = \frac{P^2}{R}, \quad Q \cdot \frac{P}{R} = \frac{PQ}{R};$$

und eben so ist die nach AD wirkende Kraft

$$R \cdot \frac{Q}{R} = Q$$

die Resultirende der nach AB, AC wirkenden Kräfte

$$P \cdot \frac{Q}{R} = \frac{PQ}{R}, \quad Q \cdot \frac{Q}{R} = \frac{Q^2}{R}.$$

Machen wir also den Winkel $BAE = CAD$, den Winkel $CAF = BAD$; so kann offenbar die nach AB wirkende Kraft P durch zwei nach AE und AD wirkende Kräfte

$$\frac{PQ}{R} \quad \text{und} \quad \frac{P^2}{R},$$

und eben so die nach AC wirkende Kraft Q durch zwei nach AF und AD wirkende Kräfte

$$\frac{PQ}{R} \text{ und } \frac{Q^2}{R}$$

ersetzt werden. Da nun R nach AD die Resultirende der nach AB, AC wirkenden Kräfte P, Q ist; so ist R nach AD offenbar auch die Resultirende der nach AE, AD, AF wirkenden Kräfte

$$\frac{PQ}{R}, \frac{P^2 + Q^2}{R}, \frac{PQ}{R},$$

und folglich die nach AD oder einer dieser Richtung direct entgegengesetzten Richtung wirkende Kraft

$$R - \frac{P^2 + Q^2}{R}$$

die Resultirende der beiden nach den Richtungen AE, AF wirkenden gleichen Kräfte $\frac{PQ}{R}, \frac{PQ}{R}$, wobei man zu bemerken hat, dass die Kraft

$$R - \frac{P^2 + Q^2}{R}$$

nach der Richtung AD oder nach einer derselben direct entgegengesetzten Richtung auf den Punkt A wirkend gedacht werden muss, jenachdem die Differenz

$$R - \frac{P^2 + Q^2}{R}$$

positiv oder negativ ist. Endlich folgt noch aus der vorher gemachten Construction auf der Stelle, dass der Winkel DAE jederzeit dem Winkel DAF gleich, der Winkel EAF , welcher also von AD halbirt wird, aber immer doppelt so gross wie der Winkel BAC ist, wobei man zu bemerken hat, dass unter dem Winkel EAF immer der von den beiden Linien AE und AF eingeschlossene Winkel zu verstehen ist, in welchem der Winkel BAC liegt *).

4.

Wir wollen nun die vorher durch P, Q bezeichneten Kräfte einander gleich setzen, d. h. annehmen, dass auf den Punkt A unter einem beliebigen Richtungswinkel, der durch α bezeichnet werden mag, die beiden gleichen Kräfte P wirken, und dass die Resultirende dieser beiden Kräfte R sey; so ist nach 3.

$$R - \frac{2P^2}{R}$$

die Resultirende der beiden auf den Punkt A unter dem Winkel 2α , der auch 180° übersteigen kann, wirkenden gleichen Kräfte $\frac{P^2}{R}$, und diese Kraft wirkt ganz nach derselben Richtung wie die Kraft R , oder nach einer dieser Richtung direct entgegengesetzten Richtung, jenachdem die Differenz

$$R - \frac{2P^2}{R}$$

*) Dass der Winkel, welchen wir hier unter EAF verstehen, auch grösser als 180° seyn kann, ist klar.

positiv oder negativ ist. Nach dem Satze 2. II. ist folglich

$$\left\{ R - \frac{2P^2}{R} \right\} \cdot \frac{R}{P} = \frac{R^2 - 2P^2}{P}$$

die Resultirende der beiden auf den Punkt A unter dem Winkel 2α wirkenden gleichen Kräfte

$$\frac{P^2}{R} \cdot \frac{R}{P} = P,$$

und die Richtung dieser Resultirenden liegt mit der Richtung der Kraft R in derselben geraden Linie, wobei man wieder zu bemerken hat, dass man sich diese Resultirende auf den Punkt A nach derselben Richtung wie die Kraft R , oder nach einer der Richtung dieser Kraft direct entgegengesetzten Richtung wirkend denken muss, jenachdem die Grösse

$$\frac{R^2 - 2P^2}{P}$$

positiv oder negativ ist.

5.

Wir behaupten nun die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Die geometrische Darstellung der Resultirenden für jede zwei auf einen beliebigen Punkt A unter dem Richtungswinkel α wirkende einander gleiche Kräfte P , ist jederzeit die durch den Punkt A gehende Diagonale des mit den geometrischen Darstellungen der beiden auf den Punkt A wirkenden gleichen Kräfte als Seiten beschriebenen Rhombus.

Um dieses wichtige Theorem zu beweisen, wollen wir annehmen, dass dasselbe für zwei gewisse auf den Punkt A unter einem beliebigen Richtungswinkel θ wirkende einander gleiche Kräfte, die wir ebenfalls durch P bezeichnen wollen, gelte, und dass folglich die geometrische Darstellung der Resultirenden R dieser beiden Kräfte die durch den Punkt A gehende Diagonale des mit deren geometrischen Darstellungen als Seiten beschriebenen Rhombus sey; so ist nach bekannten trigonometrischen Sätzen

$$R^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos \theta = 2P^2 (1 + \cos \theta),$$

oder, weil bekanntlich $1 + \cos \theta = 2 \cos \frac{1}{2} \theta$ ist, $R^2 = 4P^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta$, d. i.

$$R = 2P \cos \frac{1}{2} \theta.$$

Nach 4. ist nun

$$\frac{R^2 - 2P^2}{P}$$

die Resultirende der beiden auf den Punkt A unter dem Winkel 2θ , welcher auch grösser als 180° seyn kann, wirkenden gleichen Kräfte P , und diese Resultirende wirkt ganz nach derselben Richtung wie die Kraft R , oder nach einer dieser Richtung direct entgegengesetzten Richtung, jenachdem

$$\frac{R^2 - 2P^2}{R}$$

positiv oder negativ ist. Weil die Richtung der Resultirenden der unter dem Winkel 2θ auf den Punkt A wirkenden gleichen Kräfte P mit der Richtung der Resultirenden der unter dem Richtungswinkel θ auf den Punkt A wirkenden gleichen Kräfte P in einer geraden Linie liegt, und nach der Voraussetzung die Richtung der Resultirenden der beiden letztern Kräfte durch die durch den Punkt A gehende Diagonale des mit den geometri-

schen Darstellungen dieser Kräfte als Seiten beschriebenen Rhombus dargestellt wird; so ist nach allem Vorhergehenden klar, dass auch die Richtung der Resultirenden der beiden unter dem Winkel 2θ auf den Punkt A wirkenden gleichen Kräfte P mit der durch den Punkt A gehenden Diagonale des mit den geometrischen Darstellungen dieser Kräfte beschriebenen Rhombus in derselben geraden Linie liegt, wobei zum Ueberflusse noch bemerkt werden mag, dass die Diagonalen eines jeden Rhombus die Winkel, durch deren Spitzen sie gehen, halbiren. Die Grösse der Resultirenden der auf den Punkt A unter dem Winkel 2θ wirkenden gleichen Kräfte P wird nach dem Vorhergehenden durch die Formel

$$\frac{R^2 - 2P^2}{P}$$

dargestellt. Weil nun aber nach dem Obigen

$$R^2 = 4P^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta^2$$

ist; so ist

$$\frac{R^2 - 2P^2}{P} = \frac{2P^2 (2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta^2 - 1)}{P} = 2P (2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta^2 - 1).$$

Nach bekannten goniometrischen Formeln ist

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{1}{2} \theta^2 - \sin^2 \frac{1}{2} \theta^2 = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta^2 - 1.$$

Also ist

$$\frac{R^2 - 2P^2}{P} = 2P \cos \theta,$$

so dass folglich $2P \cos \theta$ der analytische Ausdruck der Grösse der Resultirenden der beiden unter dem Winkel 2θ auf den Punkt A wirkenden gleichen Kräfte P ist, wobei man aber zu bemerken hat, dass durch das Vorzeichen dieses Ausdrucks bestimmt wird, ob die in Rede stehende Resultirende auf den Punkt A nach derselben Richtung wie die Kraft R , oder nach einer der Richtung dieser Kraft direct entgegengesetzten Richtung wirkt, so dass also das Erste oder das Zweite Statt findet, jenachdem $\cos \theta$ positiv oder negativ, d. i. $\theta <$ oder $> 90^\circ$, $2\theta <$ oder $> 180^\circ$ ist. Nun erhellet aber auf der Stelle, dass $2P \cos \theta$ auch der analytische Ausdruck der durch den Punkt A gehenden Diagonale des mit den geometrischen Darstellungen der beiden auf den Punkt A unter dem Winkel 2θ wirkenden gleichen Kräfte P beschriebenen Rhombus ist, zugleich mit Rücksicht auf die Lage dieser Diagonale in Bezug auf den Punkt A , woraus, in Verbindung mit allem Vorhergehenden, sich auf ganz unzweideutige Weise ergibt, dass die Resultirende dieser beiden Kräfte durch die in Rede stehende Diagonale geometrisch, d. h. der Richtung und Grösse nach, dargestellt wird. Nehmen wir nun alles Vorhergehende zusammen; so ergibt sich, dass, wenn der zu beweisende Satz für die beiden auf den Punkt A unter dem Richtungswinkel θ wirkenden gleichen Kräfte P gilt, dieser Satz jederzeit auch für die beiden unter dem Winkel 2θ , welcher auch grösser als 180° seyn kann, auf den Punkt A wirkenden gleichen Kräfte P gelten muss.

Wirken nun auf den Punkt A ganz nach ein und derselben Richtung hin zwei beliebige einander gleiche Kräfte P ; so ist deren Resultirende offenbar $= 2P$ und wirkt auf den Punkt A ganz nach derselben Richtung hin wie die beiden durch P bezeichneten einander gleichen Kräfte, woraus man also sieht, dass der zu beweisende Satz für jede zwei auf den Punkt A wirkende einander gleiche Kräfte gilt, wenn der Richtungswinkel derselben $= 0$ ist. Schliessen nun aber die Richtungen der beiden auf den Punkt A wirkenden gleichen Kräfte P den beliebigen Winkel α ein; so setze man

$$\frac{a}{2^n} = \theta,$$

und denke sich n unendlich gross genommen, so dass θ unendlich klein wird, oder der Null unendlich nahe kommt. Dann gilt unser Satz nach dem Vorhergehenden offenbar für die beiden unter dem Richtungswinkel θ auf den Punkt A wirkenden beliebigen einander gleichen Kräfte P , und folglich nach dem oben Bewiesenen für dieselben auf den Punkt A wirkenden gleichen Kräfte P , wenn der Richtungswinkel nach und nach

$$2\theta, 2^2 \cdot \theta, 2^3 \cdot \theta, 2^4 \cdot \theta, 2^5 \cdot \theta, \dots 2^n \cdot \theta$$

ist. Da nun aber $2^n \cdot \theta = a$ ist; so gilt das zu beweisende Theorem für jede zwei einander gleiche, übrigens ganz beliebige, auf den Punkt A unter dem ganz beliebigen Richtungswinkel a wirkende Kräfte P , und ist daher hierdurch in völliger Allgemeinheit bewiesen.

Es würde völlig überflüssig seyn, wenn wir nun noch zeigen wollten, wie man von dem hier bewiesenen speciellen Falle zu dem allgemeinen Satze übergehen kann, da uns hierzu kein besserer Weg, als der von *Poisson* eingeschlagene, bekannt ist, und das Werk dieses trefflichen Geometers in den Händen aller gründlichen Mathematiker ist.

II.

Ueber das Keplersche Problem.

Obgleich die treffliche Auflösung des Keplerschen Problems, welche *Gauss* in seinem berühmten Werke gegeben hat*), in keiner Beziehung etwas zu wünschen übrig lässt; so dürfte doch vielleicht auch die folgende annähernde Auflösung der Aufmerksamkeit der Astronomen nicht ganz unwerth seyn, weil dieselbe ebenfalls leicht zum Zwecke führt, und sich wohl auch dadurch einigermaßen empfehlen möchte, dass sie sich auf einige einfache trigonometrische Formeln bringen lässt, nach denen die Rechnung in allen Fällen ohne Schwierigkeit geführt werden kann.

Die aufzulösende Gleichung ist bekanntlich

$$\phi - \mu = \rho \sin \phi,$$

wo μ und ρ bekannte Grössen sind, ϕ gesucht wird. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin(\phi - \mu) &= \sin(\rho \sin \phi) \\ &= \rho \sin \phi - \frac{\rho^3 \sin^3 \phi}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\rho^5 \sin^5 \phi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots, \\ &= \sin \phi \cos \mu - \cos \phi \sin \mu, \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \cos \mu - \sin \mu \cot \phi \\ &= \rho - \frac{1}{6} \rho^3 \sin^2 \phi + \frac{1}{120} \rho^5 \sin^4 \phi - \dots, \end{aligned}$$

oder

$$\cot \phi = \frac{\cos \mu - \rho}{\sin \mu} + \frac{\rho^3 \sin^2 \phi}{6 \sin \mu} - \frac{\rho^5 \sin^4 \phi}{120 \sin \mu} + \dots,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$a = \frac{\cos \mu - \rho}{\sin \mu}, \quad b = \frac{\rho^3}{6 \sin \mu}, \quad c = \frac{\rho^5}{120 \sin \mu}, \quad \dots$$

setzen,

$$\cot \phi = a + b \sin^2 \phi - c \sin^4 \phi + \dots$$

Weil nun bei wirklichen Anwendungen

$$c \sin^4 \phi = \frac{\rho^5 \sin^4 \phi}{120 \sin \mu}$$

immer eine der Null nahe kommende Grösse ist, und dies noch viel mehr von den auf dieses Glied folgenden Gliedern der obigen Reihe gilt; so kann man näherungsweise

$$\cot \phi = a + b \sin^2 \phi$$

setzen. Quadriert man auf beiden Seiten dieser Gleichung; so erhält man

$$\cot^2 \phi = a^2 + 2ab \sin^2 \phi + b^2 \sin^4 \phi,$$

*) Theoria motus corporum coelestium. Hamb. 1809, art. 11. 12. 13.

oder, weil auch

$$b^2 \sin \phi^4 = \frac{\rho^6 \sin \phi^4}{36 \sin \mu^2}$$

immer eine der Null sehr nahe kommende Grösse ist, näherungsweise

$$\cot \phi^2 = a^2 + 2ab \sin \phi^2,$$

oder

$$\cot \phi^2 = a^2 + \frac{2ab}{1 + \cot \phi^2},$$

mittelst welcher Gleichung man auch $\cot \phi^2$ leicht in einen Kettenbruch entwickeln könnte, und folglich

$$\cot \phi^4 + (1 - a^2) \cot \phi^2 = a(a + 2b).$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt sich

$$\cot \phi^2 = \frac{-(1 - a^2) \pm \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}}{2},$$

oder

$$\sin \phi^2 = \frac{2}{1 + a^2 \pm \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$1 + a^2 \mp \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}$$

multiplicirt,

$$\sin \phi^2 = - \frac{1 + a^2 \mp \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}}{4ab}.$$

Ist nun ab positiv, so ist

$$- \frac{1 + a^2 + \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}}{4ab}$$

offenbar negativ, und man muss folglich

$$\sin \phi^2 = - \frac{1 + a^2 - \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}}{4ab}$$

setzen. Aus diesem Ausdrucke ergibt sich

$$\sin \phi^2 = - \frac{1 + a^2}{4ab} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{8ab}{(1 + a^2)^2}} \right\},$$

und folglich, wenn

$$\frac{8ab}{(1 + a^2)^2} = \tan^2 \theta^2$$

gesetzt wird, nach einigen sich leicht ergebenden trigonometrischen Verwandlungen,

$$\sin \phi^2 = \frac{(1 + a^2) \sin \frac{1}{2} \theta^2}{2ab \cos \theta}.$$

Setzen wir nun

$$a = \tan \omega, \quad 1 + a^2 = \sec^2 \omega;$$

so wird

$$\sin \phi^2$$

$$\sin \phi^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} \theta^2}{2ab \cos \omega^2 \cos \theta}.$$

Aber

$$8ab = (1 + a^2)^2 \operatorname{tang} \theta^2 = \frac{\operatorname{tang} \theta^2}{\cos \omega^4},$$

und folglich nach einigen leichten Verwandlungen

$$\sin \phi^2 = \frac{\cos \theta \cos \omega^2}{\cos \frac{1}{2} \theta^2};$$

also

$$\sin \phi = \pm \frac{\cos \omega}{\cos \frac{1}{2} \theta} \sqrt{\cos \theta}.$$

Auch ist

$$1 + a^2 = \frac{\sqrt{8ab}}{\operatorname{tang} \theta},$$

und folglich

$$\sin \phi^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} \theta^2 \sqrt{8ab}}{2ab \operatorname{tang} \theta \cos \theta} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{2ab}};$$

also

$$\sin \phi = \pm \frac{\sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta}}{\sqrt[4]{2ab}}.$$

Welchen Werth man für ϕ zu nehmen hat, wird sich, weil wegen der Gleichung

$$\phi = \mu + \rho \sin \phi$$

ϕ nie viel von μ verschieden seyn kann, immer leicht beurtheilen lassen.

Die Berechnung der Grössen a und b kann man sich auf folgende Art erleichtern. Man setze

$$\frac{\rho}{\sin \mu} = \operatorname{tang} \xi;$$

so ist

$$a = \frac{\cos(\mu + \xi)}{\sin \mu \cos \xi}, \quad b = \frac{1}{6} \rho^2 \operatorname{tang} \xi.$$

Ueberhaupt wird die Rechnung nun in dem Falle, wo ab positiv ist, nach folgenden Formeln geführt:

$$\frac{\rho}{\sin \mu} = \operatorname{tang} \xi, \quad a = \frac{\cos(\mu + \xi)}{\sin \mu \cos \xi}, \quad b = \frac{1}{6} \rho^2 \operatorname{tang} \xi;$$

$$\operatorname{tang} \omega = a, \quad \operatorname{tang} \theta = \cos \omega^2 \sqrt{8ab};$$

$$\sin \phi = \pm \frac{\cos \omega}{\cos \frac{1}{2} \theta} \sqrt{\cos \theta} \quad \text{oder} \quad \sin \phi = \pm \frac{\sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta}}{\sqrt[4]{2ab}}.$$

Um die Anwendung dieser Formeln durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir zuvörderst das folgende, welches *Bohnenberger* in seiner *Astronomie* S. 288. nach der Methode von *Gauss* berechnet hat.

$$\mu = 26^{\circ} 6' 9'', 28 ; \rho = 0,0931340.$$

$\log \rho$	$=$	0,9691083	—	2
$\log \sin \mu$	$=$	0,6434325	—	1
$\log \text{Tang} \xi$	$=$	9,3256758		
ξ	$=$	11° 57' 6", 59		
μ	$=$	26. 6. 9, 28		
$\mu + \xi$	$=$	38. 3. 15, 87		
$\log \cos (\mu + \xi)$	$=$	0,8962096	—	1
$\log \cos \xi$	$=$	0,9904818	—	1
$\log \sin \mu$	$=$	0,6434325	—	1
		0,6339143	—	1
$\log a$	$=$	0,2622953		
$\log . \rho^2$	$=$	0,9382166	—	3
$\log \text{tang} \xi$	$=$	0,3256758	—	1
$\text{cd} \log 3$	$=$	9,5228787		
$\log . 2b$	$=$	0,7867711	—	4
$\log \text{Tang} \omega$	$=$	10,2622953		
ω	$=$	61° 20' 13", 33		
$\log \cos \omega$	$=$	0,6809303	—	1
$\log . \cos \omega^2$	$=$	0,3618606	—	1
$\log a$	$=$	0,2622953		
$\log . 2b$	$=$	0,7867711	—	4
$\log 4$	$=$	0,6020600		
$\log . 8ab$	$=$	0,6511264	—	3
$\log \sqrt{8ab}$	$=$	0,8255632	—	2
$\log \text{Tang} \theta$	$=$	8,1874238		
$\theta = 52' 55'', 52 ; \frac{1}{2} \theta$	$=$	26' 27", 76		
$\log \cos \theta$	$=$	0,9999485	—	1
$\log \sqrt{\cos \theta}$	$=$	0,9999743	—	1
$\log \cos \omega$	$=$	0,6809303	—	1
		0,6809046	—	1
$\log \cos \frac{1}{2} \theta$	$=$	0,9999871	—	1
$\log \text{Sin} \phi$	$=$	9,6809175		
ϕ	$=$	28° 39' 43", 35		

Nach der Methode von Gauss findet Bohnenberger

$$\phi = 28^{\circ} 39' 43'', 34 .$$

Um die Richtigkeit des von uns gefundenen Werths von ϕ zu prüfen, führe man denselben in die rechte Seite der Gleichung

ein. Zu dem Ende hat man

$$\begin{aligned}\phi &= \mu + \rho \sin \phi \\ \log \sin \phi &= 0,6809175 - 1 \\ \log \rho &= 0,9691083 - 2 \\ \log 206264,8 &= 5,3144251 \\ &\hline &= 3,9644509 \\ \rho \sin \phi &= 2^\circ 33' 34'',06 \\ \mu &= 26. 6. 9,28 \\ &\hline \phi &= 28. 39. 43,34.\end{aligned}$$

Führt man nun wieder diesen Werth von ϕ in die rechte Seite der obigen Gleichung ein, so hat man

$$\begin{aligned}\log \sin \phi &= 0,6809174 - 1 \\ \log \rho &= 0,9691083 - 2 \\ \log 206264,8 &= 5,3144251 \\ &\hline &= 3,9644508 \\ \rho \sin \phi &= 2^\circ 33' 34'',05 \\ \mu &= 26. 6. 9,28 \\ &\hline \phi &= 28. 39. 43,33.\end{aligned}$$

Führt man diesen Werth von ϕ ferner in die rechte Seite unserer obigen Gleichung ein, und berechnet ϕ von Neuem; so erhält man wieder

$$\phi = 28^\circ 39' 43'',33,$$

und dieser Werth von ϕ ist also der richtige, weil er in der That der gegebenen Gleichung vollständig genügt

Gauss hat in der *Theoria motus corporum coelestium* p. 12. nach seiner Methode die Rechnung für

$$\mu = 332^\circ 28' 54'',77; \log \rho = 0,3897262 - 1$$

ausgeführt. Um auch dieses Beispiel nach unsern obigen Formeln zu berechnen, wollen wir zuerst grösserer Bequemlichkeit wegen die Gleichung

$$\phi - \mu = \rho \sin \phi$$

auf eine andere Form bringen. Weil nämlich

$$\phi - 2\pi + 2\pi - \mu = -\rho \sin(2\pi - \phi)$$

oder

$$-(2\pi - \phi) + (2\pi - \mu) = -\rho \sin(2\pi - \phi),$$

oder

$$(2\pi - \phi) - (2\pi - \mu) = \rho \sin(2\pi - \phi)$$

ist; so haben wir für

$$2\pi - \phi = \phi', \quad 2\pi - \mu = \mu'$$

die Gleichung

$$\phi' - \mu' = \rho \sin \phi',$$

in welcher

$$\mu' = 27^\circ 31' 5'',23$$

ist, und wollen nun diese Gleichung nach unsern obigen Formeln auflösen, wozu die folgende Rechnung erforderlich ist.

$$\begin{aligned}
 \log \rho &= 0,3897262 & - & 1 \\
 \log \sin \mu' &= 0,6646693 & - & 1 \\
 \log \text{Tang } \xi &= 9,7250569 \\
 \xi &= 27^\circ 57' 58'',48 \\
 \mu' &= 27. 31. 5,23 \\
 \mu' + \xi &= 55. 29. 3,71 \\
 \log \cos (\mu' + \xi) &= 0,7533004 & - & 1 \\
 \log \cos \xi &= 0,9460709 & - & 1 \\
 \log \sin \mu' &= 0,6646693 & - & 1 \\
 &= 0,6107402 & - & 1 \\
 \log a &= 0,1425602 \\
 \log \cdot \rho^2 &= 0,7794524 & - & 2 \\
 \log \text{tang } \xi &= 0,7250569 & - & 1 \\
 \text{cd log } 3 &= 9,5228787 \\
 \log \cdot 2b &= 0,0273880 & - & 2 \\
 \log \text{Tang } \omega &= 10,1425602 \\
 \omega &= 54^\circ 14' 21'',85 \\
 \log \cos \omega &= 0,7667100 & - & 1 \\
 \log \cdot \cos \omega^2 &= 0,5334200 & - & 1 \\
 \log a &= 0,1425602 \\
 \log \cdot 2b &= 0,0273880 & - & 2 \\
 \log 4 &= 0,6020600 \\
 \log \cdot 8ab &= 0,7720082 & - & 2 \\
 \log \sqrt{8ab} &= 0,3860041 & - & 1 \\
 \log \text{Tang } \theta &= 8,9194241 \\
 \theta &= 4^\circ 44' 54'',38 ; \quad \frac{1}{2} \theta = 2^\circ 22' 27'',19 \\
 \log \cos \theta &= 0,9985068 & - & 1 \\
 \log \sqrt{\cos \theta} &= 0,9992534 & - & 1 \\
 \log \cos \omega &= 0,7667100 & - & 1 \\
 &= 0,7659634 & - & 1 \\
 \log \cos \frac{1}{2} \theta &= 0,9996271 & - & 1 \\
 \log \sin \phi' &= 9,7663363 \\
 \phi' &= 35^\circ 43' 30'',41 \\
 \phi &= 324. 16. 29,59
 \end{aligned}$$

Gauss findet

$$\phi = 324^\circ 16' 29'',50.$$

Um nun die Richtigkeit des von uns gefundenen Werths von ϕ' zu prüfen, und zu-

gleich mehr genäherte Werthe zu finden, verfahren wir wieder ganz auf dieselbe Art wie im vorigen Falle.

$$\begin{aligned} \log \sin \phi' &= 0,7663363 - 1 \\ \log \rho &= 0,3897262 - 1 \\ \log 206264,8 &= 5,3144251 \\ &\hline &4,4704876 \\ \rho \sin \phi' &= 8^\circ 12' 25'',25 \\ \mu' &= 27. 31. 5,23 \\ \phi' &= 35. 43. 30,48 \\ \phi &= 324. 16. 29,52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin \phi' &= 0,7663365 - 1 \\ \log \rho &= 0,3897262 - 1 \\ \log 206264,8 &= 5,3144251 \\ &\hline &4,4704878 \\ \rho \sin \phi' &= 8^\circ 12' 25'',26 \\ \mu' &= 27. 31. 5,23 \\ \phi' &= 35. 43. 30,49 \\ \phi &= 324. 16. 29,51 \end{aligned}$$

Nun kehrt ganz dieselbe Rechnung wieder, und

$$\phi = 324^\circ 16' 29'',51$$

ist also der richtige Werth von ϕ , welcher in der That der Gleichung

$$\phi - \mu = \rho \sin \phi$$

vollständig genügt.

Wenn ab negativ ist; so sind die Ausdrücke

$$\begin{aligned} &-\frac{1 + a^2 - \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}}{4ab}, \\ &-\frac{1 + a^2 + \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}}{4ab} \end{aligned}$$

offenbar beide positiv, und wir haben also

$$\begin{aligned} \sin \phi^2 &= -\frac{1 + a^2 - \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}}{4ab}, \\ \sin \phi_1^2 &= -\frac{1 + a^2 + \sqrt{(1 + a^2)^2 + 8ab}}{4ab}, \end{aligned}$$

wenn ϕ und ϕ_1 zwei Werthe der gesuchten Grösse bezeichnen.

Es ist nun

$$\sin \phi^2 = -\frac{1 + a^2}{4ab} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{8ab}{(1 + a^2)^2}} \right\}.$$

Setzt man

$$\sin \theta^2 = - \frac{8ab}{(1+a^2)^2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{-8ab}}{1+a^2},$$

welches verstatet ist, weil $-ab$ positiv ist, und

$$- \frac{8ab}{(1+a^2)^2} \geq 1$$

seyn muss, da, wenn dies nicht der Fall wäre,

$$1 + \frac{8ab}{(1+a^2)^2} = \frac{(1+a^2)^2 + 8ab}{(1+a^2)^2},$$

also auch $(1+a^2)^2 + 8ab$ negativ, und folglich sowohl $\sin \phi^2$, als auch $\sin \phi_1^2$ imaginär seyn würde; so erhält man nach leichter Rechnung

$$\sin \phi^2 = - \frac{(1+a^2) \sin \frac{1}{2} \theta^2}{2ab}.$$

Aber

$$1+a^2 = \frac{\sqrt{-8ab}}{\sin \theta},$$

und folglich

$$\sin \phi^2 = \frac{\tan \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{-2ab}}, \quad \sin \phi = \pm \frac{\sqrt{\tan \frac{1}{2} \theta}}{\sqrt[4]{-2ab}}.$$

Setzen wir

$$a = \tan \omega, \quad 1+a^2 = \sec \omega^2;$$

so wird

$$\sin \theta = \cos \omega^2 \sqrt{-8ab}, \quad \sin \phi^2 = - \frac{\sin \frac{1}{2} \theta^2}{2ab \cos \omega^2}.$$

Es ist aber

$$-2ab = \frac{\sin \theta^2}{4 \cos \omega^4},$$

und folglich

$$\sin \phi^2 = \frac{\cos \omega^2}{\cos \frac{1}{2} \theta^2}, \quad \sin \phi = \pm \frac{\cos \omega}{\cos \frac{1}{2} \theta}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\sin \phi^2 \sin \phi_1^2 = - \frac{1}{2ab} = \frac{4 \cos \omega^4}{\sin \theta^2};$$

also ist

$$\sin \phi_1^2 = \frac{\cos \omega^2}{\sin \frac{1}{2} \theta^2}, \quad \sin \phi_1 = \pm \frac{\cos \omega}{\sin \frac{1}{2} \theta}.$$

Wir haben daher zur Berechnung von ϕ und ϕ_1 die folgenden Formeln:

$$a = \tan \omega, \quad \sin \theta = \cos \omega^2 \sqrt{-8ab};$$

$$\sin \phi = \pm \frac{\cos \omega}{\cos \frac{1}{2} \theta}, \quad \sin \phi_1 = \pm \frac{\cos \omega}{\sin \frac{1}{2} \theta};$$

oder auch

$$\sin \phi = \pm \frac{\sqrt{\tan^2 \frac{1}{2} \theta}}{\sqrt{1 - 2ab}}, \quad \sin \phi_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \frac{1}{2} \theta} \cdot \sqrt{1 - 2ab}}.$$

Wie a und b berechnet werden können, ist schon oben gezeigt worden. Welchen Werth des gesuchten Winkels oder Bogens man zu nehmen hat, lässt sich immer leicht beurtheilen, da wegen der Gleichung

$$\phi = \mu + \rho \sin \phi$$

ϕ nicht viel von μ verschieden seyn kann.

III.

Über einen Satz von den Kettenbrüchen.

1.

Dass die absoluten Werthe der Differenzen zwischen zwei einander benachbarten Partialwerthen eines Kettenbruchs mit lauter positiven Zählern und Nennern immer kleiner und kleiner werden, wenn man diese Differenzen immer weiter und weiter vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt, wird in jedem Lehrbuche der allgemeinen Arithmetik, in welchem die Lehre von den Kettenbrüchen mit einiger Vollständigkeit abgehandelt ist, bewiesen. Dass aber die absoluten Werthe der in Rede stehenden Differenzen bei einem in's Unendliche fortlaufenden Kettenbruche mit lauter positiven Zählern und Nennern beliebig klein gemacht werden können, wenn man diese Differenzen nur weit genug vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt, und dass jeder Kettenbruch dieser Art ein convergenter Kettenbruch ist, d.h. dass es für jeden Kettenbruch dieser Art eine endliche völlig bestimmte Grösse giebt, welcher sich die Partialwerthe des Kettenbruchs desto mehr nähern, je weiter man sie vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt, und der die Partialwerthe auch bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden können, wenn man sie nur weit genug vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt, habe ich noch nirgends bewiesen gefunden, so dass es wohl nicht ganz unzweckmässig seyn dürfte, wenn ich in vorliegendem Aufsätze einen Beweis dieses in vielfacher Beziehung wichtigen Theorems*) zu geben versuche.

Ich werde, unter der Voraussetzung, dass a und

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots;$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

lauter positive Grössen sind, überhaupt den Kettenbruch

$$a + a_1 : \{ a_1 + a_2 : \{ a_2 + a_3 : \{ a_3 + a_4 : \{ a_4 + \dots$$

betrachten. Die Partialwerthe dieses Kettenbruchs werde ich nach der Reihe durch

$$F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \dots,$$

die Zähler und Nenner derselben respective durch

$$Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \dots$$

und

$$N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, \dots$$

bezeichnen, und werde grösserer Deutlichkeit und Uebersichtlichkeit wegen mit dem Beweise einiger bekannten Elementarsätze von den Kettenbrüchen beginnen.

2.

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$F_0 = \frac{Z_0}{N_0} = \frac{a}{1}, \quad F_1 = \frac{Z_1}{N_1} = \frac{a_1 a + a_1}{a_1}$$

ist.

Setzt man nun

* Es wird z. B. in der folgenden Abhandlung eine Anwendung von diesem Satze gemacht werden.
 $a_1 +$

$$a_1 + \frac{a_2}{a_2} \text{ für } a_1 ;$$

so erhält man

$$F_2 = \frac{Z_2}{N_2} = \frac{a_2 (a_1 a + a_1) + a_2 a}{a_2 a_1 + a_2 \cdot 1} = \frac{a_2 Z_1 + a_2 Z_0}{a_2 N_1 + a_2 N_0} .$$

Setzt man hierin

$$a_2 + \frac{a_3}{a_3} \text{ für } a_2 ;$$

so erhält man

$$F_3 = \frac{Z_3}{N_3} = \frac{a_3 (a_2 Z_1 + a_2 Z_0) + a_3 Z_1}{a_3 (a_2 N_1 + a_2 N_0) + a_3 N_1} = \frac{a_3 Z_2 + a_3 Z_1}{a_3 N_2 + a_3 N_1} .$$

Setzt man hierin ferner

$$a_3 + \frac{a_4}{a_4} \text{ für } a_3 ;$$

so ergibt sich

$$F_4 = \frac{Z_4}{N_4} = \frac{a_4 (a_3 Z_2 + a_3 Z_1) + a_4 Z_2}{a_4 (a_3 N_2 + a_3 N_1) + a_4 N_2} = \frac{a_4 Z_3 + a_4 Z_2}{a_4 N_3 + a_4 N_2} .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und man hat daher jetzt die folgenden Gleichungen:

$$1. \begin{cases} Z_0 = a , & N_0 = 1 ; \\ Z_1 = a_1 a + a_1 , & N_1 = a_1 ; \\ Z_k = a_k Z_{k-1} + a_k Z_{k-2} , & N_k = a_k N_{k-1} + a_k N_{k-2} . \end{cases}$$

3.

Auf der Stelle erhält man

$$F_{k+1} - F_k = \frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}} - \frac{Z_k}{N_k} = \frac{Z_{k+1} N_k - Z_k N_{k+1}}{N_k N_{k+1}} .$$

Der Zähler des letzten Bruchs ist nach den Gleichungen 1.

$$\begin{aligned} (a_{k+1} Z_k + a_{k+1} Z_{k-1}) N_k - (a_{k+1} N_k + a_{k+1} N_{k-1}) Z_k \\ = (-1) (Z_k N_{k-1} - Z_{k-1} N_k) a_{k+1} . \end{aligned}$$

Weil nun

$$Z_1 N_0 - Z_0 N_1 = (a_1 a + a_1) - a a_1 = a_1$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} Z_2 N_1 - Z_1 N_2 &= (-1) (Z_1 N_0 - Z_0 N_1) a_2 = (-1)^1 \cdot a_1 a_2 , \\ Z_3 N_2 - Z_2 N_3 &= (-1) (Z_2 N_1 - Z_1 N_2) a_3 = (-1)^2 \cdot a_1 a_2 a_3 , \\ Z_4 N_3 - Z_3 N_4 &= (-1) (Z_3 N_2 - Z_2 N_3) a_4 = (-1)^3 \cdot a_1 a_2 a_3 a_4 , \end{aligned}$$

u. s. w.

und folglich, da man auf diese Art immer weiter gehen kann, allgemein

$$2. Z_{k+1} N_k - Z_k N_{k+1} = (-1)^k \cdot a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1} ,$$

eine Gleichung, die nach dem Vorhergehenden auch noch für $k = 0$, also für jedes ganze positive k gilt.

Es ist nun auch nach dem Vorhergehenden

$$3. \quad F_{k+1} - F_k = (-1)^k \cdot \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1}}{N_k N_{k+1}}.$$

4.

Nach 3. ist also

$$F_{k+1} - F_k = (-1)^k \cdot \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1}}{N_k N_{k+1}},$$

$$F_{k+2} - F_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+2}}{N_{k+1} N_{k+2}};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1}}{N_k N_{k+1}} = \Delta_k$$

setzen,

$$F_{k+1} - F_k = (-1)^k \cdot \Delta_k, \quad F_{k+2} - F_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot \Delta_{k+1}.$$

Durch leichte Rechnung ergibt sich

$$\Delta_k - \Delta_{k+1} = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_{k+1}}{N_{k+1}} \cdot \frac{N_{k+2} - a_{k+2} N_k}{N_k N_{k+2}},$$

oder, weil nach den Gleichungen 1.

$$N_{k+2} - a_{k+2} N_k = a_{k+2} N_{k+1}$$

ist,

$$\Delta_k - \Delta_{k+1} = a_{k+2} \cdot \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1}}{N_k N_{k+2}}.$$

Weil nun die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, da nach der Voraussetzung alle Zähler und Nenner des unserer Untersuchung zum Grunde gelegten allgemeinen Kettenbruchs positive Grössen sind, offenbar positiv ist; so ist auch $\Delta_k - \Delta_{k+1}$ stets eine positive Grösse, und daher, wenn nur, wie wir hier immer annehmen wollen, keine der Grössen $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ verschwindet, $\Delta_{k+1} < \Delta_k$. Hieraus sieht man, dass die beiden Partialwerthe

$$F_{k+1} \quad \text{und} \quad F_{k+2}$$

einander näher kommen wie die beiden Partialwerthe

$$F_k \quad \text{und} \quad F_{k+1},$$

und es werden also offenbar überhaupt zwei benachbarte Partialwerthe einander desto näher kommen, je weiter man sie vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt.

5.

Um nun aber, was hier eigentlich unser Hauptzweck ist, ferner zu beweisen, dass bei jedem Kettenbruche mit lauter positiven Zählern und Nennern die Differenz zwischen zwei benachbarten Partialwerthen der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man sie nur weit genug vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt, müssen wir zuerst die folgenden Sätze vorausschicken.

I. Wenn x eine beliebige positive Grösse bezeichnet, die nicht Null ist; so kann man die positive ganze Zahl n immer so bestimmen, dass, wenn A eine gegebene beliebig grosse positive Grösse bezeichnet, $(1 + x)^n > A$ ist.

Wenn

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

ist, so ist

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x),$$

d. i.

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + x^2,$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $x > 0$ ist,

$$(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x.$$

Für $n = 1$ ist nun

$$1 + x = 1 + x;$$

also ist nach dem so eben Bewiesenen

$$(1 + x)^2 > 1 + 2x,$$

$$(1 + x)^3 > 1 + 3x,$$

$$(1 + x)^4 > 1 + 4x,$$

u. s. w.

und folglich allgemein, wenn $n > 1$ ist,

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Nimmt man nun, welches offenbar immer möglich ist, die positive ganze Zahl n so, dass

$$n > \frac{A}{x}$$

ist, so ist $nx > A$, und folglich um so mehr $1 + nx > A$, also nach dem Vorhergehenden auch

$$(1 + x)^n > A,$$

wie verlangt wurde.

II. Wenn x eine positive Grösse, die kleiner als die Einheit ist, und A eine gegebene beliebig kleine positive Grösse bezeichnet; so kann man die positive ganze Zahl n immer so bestimmen, dass $x^n < A$ ist.

Weil nach der Voraussetzung $x < 1$ ist; so ist $\frac{1}{x} > 1$, und nach **I.** kann man also die positive ganze Zahl n immer so bestimmen, dass

$$\left\{ 1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right\}^n > \frac{1}{A}, \text{ d. i. } \left(\frac{1}{x} \right)^n > \frac{1}{A},$$

folglich

$$1 : \left(\frac{1}{x} \right)^n < 1 : \frac{1}{A},$$

d. i. $x^n < A$ ist, wie verlangt wurde.

III. Wenn a eine beliebige positive Grösse, A eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet, und x positiv und kleiner als die Einheit ist; so kann man die positive ganze Zahl n immer so bestimmen, dass $ax^n < A$ ist.

Nach *II.* kann man die positive ganze Zahl n so bestimmen, dass

$$x^n < \frac{A}{a}$$

ist. Dies giebt unmittelbar $ax^n < A$, wie verlangt wurde.

IV. Wenn a eine beliebige positive Grösse, A eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet, und

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$$

eine in's Unendliche fortlaufende Reihe positiver echter Brüche ist, von denen keiner grösser als der positive echte Bruch x ist; so kann man immer die positive ganze Zahl n so bestimmen, dass

$$ax_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_n < A$$

ist.

Nach *III.* kann man die positive ganze Zahl n so bestimmen, dass $ax^n < A$ ist. Nach der Voraussetzung ist aber

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_n \geq x^n.$$

Also ist offenbar auch

$$ax_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_n < A,$$

wie verlangt wurde.

6.

Zuvörderst wollen wir nun den in's Unendliche fortlaufenden Kettenbruch

$$a_1 : \{ 1 + a_2 : \{ 1 + a_3 : \{ 1 + a_4 : \{ 1 + a_5 : \{ 1 + \dots, \}$$

wo

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

lauter positive Grössen seyn sollen, betrachten.

Haben Δ_k und Δ_{k+1} in Bezug auf diesen Kettenbruch ganz dieselbe Bedeutung wie in 4. in Bezug auf den oben betrachteten allgemeinen Kettenbruch; so ist

$$\Delta_k = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_{k+1}}{N_k N_{k+1}}, \quad \Delta_{k+1} = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_{k+2}}{N_{k+1} N_{k+2}};$$

und folglich

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k \cdot \frac{a_{k+2} N_k}{N_{k+2}}.$$

Weil aber im vorliegenden Falle

$$a = 0, \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 1$$

ist; so ist nach den Gleichungen 1.

$$N_{k+2} = N_{k+1} + a_{k+2} N_k,$$

und folglich

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k \cdot \frac{a_{k+2} N_k}{N_{k+1} + a_{k+2} N_k},$$

oder

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k \cdot \frac{1}{1 + \frac{N_{k+1}}{a_{k+2} N_k}}.$$

Weil nun nach den Gleichungen 1.

$$N_{k+1} = N_k + a_{k+1} N_{k-1}$$

ist; so ist

$$\frac{N_{k+1}}{a_{k+2} N_k} = \frac{1}{a_{k+2}} \left(1 + \frac{a_{k+1} N_{k-1}}{N_k} \right),$$

und folglich

$$\frac{N_{k+1}}{a_{k+2} N_k} > \frac{1}{a_{k+2}}, \quad 1 + \frac{N_{k+1}}{a_{k+2} N_k} > \frac{1 + a_{k+2}}{a_{k+2}};$$

also nach dem Obigen offenbar

$$\Delta_{k+1} < \Delta_k \cdot \frac{a_{k+2}}{1 + a_{k+2}}.$$

Setzen wir folglich der Kürze wegen

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k L_{k+2};$$

so ist

$$L_{k+2} < \frac{a_{k+2}}{1 + a_{k+2}}.$$

Hiernach ist nun

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k L_{k+2},$$

$$\Delta_{k+2} = \Delta_k L_{k+2} L_{k+3},$$

$$\Delta_{k+3} = \Delta_k L_{k+2} L_{k+3} L_{k+4},$$

$$\Delta_{k+p-1} = \Delta_k L_{k+2} L_{k+3} L_{k+4} \dots L_{k+p};$$

und

$$L_{k+2} < \frac{a_{k+2}}{1 + a_{k+2}}, \quad L_{k+3} < \frac{a_{k+3}}{1 + a_{k+3}}, \quad \dots \quad L_{k+p} < \frac{a_{k+p}}{1 + a_{k+p}}.$$

Da die Brüche auf der rechten Seite der Zeichen des Kleinern sämtlich echte Brüche sind; so sind auch die Grössen

$$L_{k+2}, L_{k+3}, L_{k+4}, \dots, L_{k+p}$$

sämtlich kleiner als die Einheit.

Wenn α und γ positive Grössen sind und $\gamma > \alpha$ ist; so ist immer

$$\frac{\gamma}{1 + \gamma} > \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

weil die Differenz

$$\frac{\gamma}{1 + \gamma} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{\gamma - \alpha}{(1 + \alpha)(1 + \gamma)}$$

offenbar positiv ist.

Hieraus sieht man, dass der Bruch

$$\frac{a_{k+p}}{1 + a_{k+p}}$$

desto grösser ist, je grösser a_{k+p} ist, wobey sich aber von selbst versteht, dass dieser Bruch die Einheit nie übersteigt.

Weil ferner

$$\frac{a_{k+p}}{1 + a_{k+p}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{k+p}}}$$

ist; so ist klar, dass dieser Bruch, wenn a_{k+p} grösser als jede beliebige noch so grosse Grösse werden kann, sich der Einheit bis zu jedem beliebigen Grade nahe bringen lässt.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun die beiden folgenden Fälle unterscheiden.

I. Wenn a_{k+p} grösser als jede beliebige noch so grosse Grösse werden kann, wenn man nur p gross genug nimmt; so stelle man sich einmal vor, p wäre so gross geworden, dass der Bruch

$$\frac{a_{k+p}}{1 + a_{k+p}}$$

die Einheit wirklich erreicht hätte. Dann könnte, weil nach dem Obigen

$$L_{k+2} < \frac{a_{k+2}}{1 + a_{k+2}}, \quad L_{k+3} < \frac{a_{k+3}}{1 + a_{k+3}}, \quad \dots \quad L_{k+p} < \frac{a_{k+p}}{1 + a_{k+p}}$$

ist, die grösste unter den Grössen

$$L_{k+2}, L_{k+3}, L_{k+4}, \dots, L_{k+p}$$

die Einheit noch nicht erreicht haben, sondern müsste um eine gewisse Grösse kleiner als dieselbe seyn. Hieraus sieht man, dass die Grössen

$$L_{k+2}, L_{k+3}, L_{k+4}, L_{k+5}, \dots$$

nie einen gewissen positiven echten Bruch, den wir durch α bezeichnen wollen, übersteigen können, und man kann folglich nach 5. IV. die positive ganze Zahl p immer so bestimmen, dass, wenn A eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet,

$$\Delta_k L_{k+2} L_{k+3} L_{k+4} \dots L_{k+p} < A,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Delta_{k+p-1} < A$$

ist, so dass man also den absoluten Werth der Differenz

$$F_{k+p} - F_{k+p-1},$$

wenn man nur p gross genug nimmt, und folglich auch den absoluten Werth der Differenz

$$F_{n+1} - F_n,$$

wenn man nur n gross genug nimmt, kleiner als jede gegebene beliebig kleine Grösse machen, die Grössen F_n und F_{n+1} demnach bis zu jedem beliebigen Grade einander nähern kann.

II. Wenn a_{k+p} , wie gross man auch p nehmen mag, eine gewisse endliche bestimmte Grösse nicht übersteigen kann; so wird es unter den Grössen

$$a_{k+2}, a_{k+3}, a_{k+4}, a_{k+5}, \dots$$

jederzeit ein Maximum geben, welches wir durch α bezeichnen wollen. Daher wird nach dem Obigen der Bruch

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

der grösste unter den Brüchen

$$\frac{a_{k+2}}{1+a_{k+2}}, \frac{a_{k+3}}{1+a_{k+3}}, \frac{a_{k+4}}{1+a_{k+4}}, \frac{a_{k+5}}{1+a_{k+5}}, \dots,$$

und folglich auch jeder der echten Brüche

$$L_{k+2}, L_{k+3}, L_{k+4}, L_{k+5}, \dots$$

kleiner als der echte Bruch

$$\frac{a}{1+a}$$

seyn, woraus nach 5. IV. wieder folgt, dass sich p jederzeit so bestimmen lässt, dass wenn A eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet,

$$\Delta_k L_{k+2} L_{k+3} L_{k+4} \dots L_{k+p} < A,$$

folglich

$$\Delta_{k+p-1} < A$$

ist, so dass man also auch in diesem Falle Δ_{k+p-1} , wenn man nur p gross genug nimmt, jederzeit kleiner als jede gegebene noch so kleine Grösse machen kann.

7.

Aus 6. I. und 6. II. sieht man, dass die benachbarten Partialwerthe des in's Unendliche fortlaufenden Kettenbruchs

$$a_1 : \{1 + a_2 : \{1 + a_3 : \{1 + a_4 : \{1 + a_5 : \{1 + \dots$$

mit lauter positiven Gliedern, und folglich offenbar auch die benachbarten Partialwerthe des in's Unendliche fortlaufenden Kettenbruchs

$$a + a_1 : \{1 + a_2 : \{1 + a_3 : \{1 + a_4 : \{1 + a_5 : \{1 + \dots$$

mit lauter positiven Gliedern, in jedem Falle einander bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden können, wenn man sie nur weit genug vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt.

Weil nun, wie man sogleich übersieht, z. B. der sechsgliedrige Kettenbruch

$$a + a_1 : \{a_1 + a_2 : \{a_2 + a_3 : \{a_3 + a_4 : \{a_4 + a_5 : \{a_5$$

immer leicht auf die Form

$$a + \frac{a_1}{a_1} : \left\{ 1 + \frac{a_2}{a_1 a_2} : \left\{ 1 + \frac{a_3}{a_2 a_3} : \left\{ 1 + \frac{a_4}{a_3 a_4} : \left\{ 1 + \frac{a_5}{a_4 a_5} : \left\{ 1 \right. \right. \right. \right. \right.$$

gebracht werden kann; so ist klar, dass die Partialwerthe des Kettenbruchs

$$a + a_1 : \{a_1 + a_2 : \{a_2 + a_3 : \{a_3 + a_4 : \{a_4 + a_5 : \{a_5 + \dots$$

von den Partialwerthen des Kettenbruchs

$$a + \frac{a_1}{a_1} : \left\{ 1 + \frac{a_2}{a_1 a_2} : \left\{ 1 + \frac{a_3}{a_2 a_3} : \left\{ 1 + \frac{a_4}{a_3 a_4} : \left\{ 1 + \frac{a_5}{a_4 a_5} : \left\{ 1 + \dots \right. \right. \right. \right. \right.$$

nicht verschieden sind, und dass also nach dem Vorhergehenden auch die benachbarten Partialwerthe des ganz beliebigen Kettenbruchs

$$a + a_1 : \{a_1 + a_2 : \{a_2 + a_3 : \{a_3 + a_4 : \{a_4 + a_5 : \{a_5 + \dots$$

mit lauter positiven Gliedern einander bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden können, oder dass man die Differenzen zwischen den benachbarten Partialwerthen dieses Kettenbruchs der Null beliebig nahe bringen kann, wenn man die Partialwerthe nur weit genug vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt, welches der erste Theil des zu beweisenden, in 1. ausgesprochenen Satzes ist.

8.

Bevor wir den zweiten Theil des in Rede stehenden Satzes beweisen können, müssen wir das folgende Theorem aus der Lehre von der Convergenz der Reihen vorausschicken.

Wenn die Glieder einer Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, und ihre absoluten Werthe sich, wenn der Index oder die Stellenzahl wächst, der Null beständig und bis zu jedem beliebigen Grade nähern; so ist die Reihe jederzeit convergent und hat also eine bestimmte Summe.

Die Reihe sey

$$t_0, -t_1, t_2, -t_3, t_4, -t_5, \dots$$

Nach der Voraussetzung nähert sich t_n , wenn n wächst, der Null fortwährend, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Setzt man

$$s_n = t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - \dots + t_{n-1} \cdot (-1)^{n-1};$$

so ist

$$s_{n+m} - s_n = (-1)^n \{t_n - t_{n+1} + t_{n+2} - \dots + t_{n+m-1} \cdot (-1)^{m-1}\},$$

und folglich, jenachdem m gerade oder ungerade ist,

$$\begin{aligned} & s_{n+m} - s_n \\ &= (-1)^n \{t_n - (t_{n+1} - t_{n+2}) - \dots - (t_{n+m-3} - t_{n+m-2}) - t_{n+m-1}\} \\ &= (-1)^n \{(t_n - t_{n+1}) + (t_{n+2} - t_{n+3}) + \dots + (t_{n+m-2} - t_{n+m-1})\}, \\ & \text{oder} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & s_{n+m} - s_n \\ &= (-1)^n \{t_n - (t_{n+1} - t_{n+2}) - \dots - (t_{n+m-2} - t_{n+m-1})\} \\ &= (-1)^n \{(t_n - t_{n+1}) + \dots + (t_{n+m-3} - t_{n+m-2}) + t_{n+m-1}\}. \end{aligned}$$

Ueberlegt man nun, dass nach der Voraussetzung die absoluten Werthe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$$

der Glieder der gegebenen Reihe fortwährend abnehmen; so erhellet aus dem Vorhergehenden leicht, dass der absolute Werth von

$$s_{n+m} - s_n$$

immer zwischen

$$t_n - t_{n+1} \text{ und } t_n$$

enthalten ist. Wächst also n , so wird sich $s_{n+m} - s_n$ für jedes m der Null nähern, und wird derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt, weil nach der Voraussetzung

$$t_n \text{ und } t_n - (t_n - t_{n+1}) = t_{n+1}$$

sich, wenn n wächst, der Null nähern, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Hieraus folgt nach den allgemeinen Begriffen von der Convergenz der Reihen unmittelbar, dass unter den gemachten Voraussetzungen die gegebene Reihe convergirt und daher eine bestimmte Summe hat.

9.

Bezeichnen nun wieder

$$F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$$

die Partialwerthe des Kettenbruchs

$$a + a_1 :$$

$a + a_1 : \{ a_1 + a_2 : \{ a_2 + a_3 : \{ a_3 + a_4 : \{ a_4 + \dots$
mit lauter positiven Gliedern; so ist, wie wir in 4. gesehen haben, allgemein

$F_{k+1} - F_k = (-1)^k \cdot \Delta_k$, $F_{k+1} = F_k + (-1)^k \cdot \Delta_k$,
und folglich

$F_1 = F_0 + \Delta_0$, $F_2 = F_1 - \Delta_1$, $F_3 = F_2 + \Delta_2$, $F_4 = F_3 - \Delta_3$, $\dots$;
also

$$F_0 = a,$$

$$F_1 = a + \Delta_0,$$

$$F_2 = a + \Delta_0 - \Delta_1,$$

$$F_3 = a + \Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2,$$

$$F_4 = a + \Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3,$$

u. s. w.

$$F^k = a + \Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \dots + (-1)^{k-1} \cdot \Delta_{k-1}.$$

u. s. w.

Die Glieder der Reihe

$$\Delta_0, -\Delta_1, \Delta_2, -\Delta_3, \Delta_4, -\Delta_5, \dots$$

sind abwechselnd positiv und negativ, und aus 4. 6. und 7. ergibt sich unmittelbar, dass ihre absoluten Werthe, wenn der Index oder die Stellenzahl wächst, sich fortwährend der Null nähern, und derselben auch beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur die Stellenzahl gross genug nimmt. Daher ist die in Rede stehende Reihe nach dem im 8. bewiesenen Satze jederzeit convergent und hat eine bestimmte Summe. Also ist natürlich auch die Reihe

$$a, \Delta_0, -\Delta_1, \Delta_2, -\Delta_3, \Delta_4, -\Delta_5, \dots$$

jederzeit convergent, und hat folglich eine bestimmte Summe, die wir durch s bezeichnen, und daher

$$s = a + \Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4 - \dots$$

setzen wollen.

Weil nun nach dem Obigen die Partialwerthe des Kettenbruchs

$$a + a_1 : \{ a_1 + a_2 : \{ a_2 + a_3 : \{ a_3 + a_4 : \{ a_4 + \dots$$

nach der Reihe den Grössen

$$a,$$

$$a + \Delta_0,$$

$$a + \Delta_0 - \Delta_1,$$

$$a + \Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2,$$

$$a + \Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3,$$

u. s. w.

gleich sind; so ist natürlich auch dieser Kettenbruch convergent, d. h. seine Partialwerthe nähern sich der Grösse s desto mehr, je weiter man sie vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt, und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man sie nur weit genug vom Anfange des Kettenbruchs entfernt nimmt, so dass wir also

$$s = a + a_1 : \{ a_1 + a_2 : \{ a_2 + a_3 : \{ a_3 + a_4 : \{ a_4 + \dots$$

zu setzen berechtigt sind, womit folglich auch der zweite Theil des in 1. ausgesprochenen Satzes bewiesen ist.

IV.

Über einen von Wallis gefundenen Satz von den Kettenbrüchen, und über die von Brouncker und Wallis gefundenen Ausdrücke der Peripherie des Kreises.

1.

Euler theilt in den *Comm. Petrop. T. XI. p. 32.* einen merkwürdigen von dem berühmten brittischen Geometer *Johann Wallis* gefundenen Satz von den Kettenbrüchen ohne Beweis mit. In den *Comm. Petrop. T. IX. p. 101.* führt er den Satz auch an, und sagt, *Wallis* führe den Beweis bloss durch Induction. In den *Comm. Petrop. T. XI. p. 41.* sagt *Euler*: „*Quocirca jam pridem multam collocavi operam, ut tam veritatem istius theorematis demonstrarem, quam viam detegerem, qua a priori ad hanc ipsam fractionem continuam pertingere liceret; quae investigatio, quo difficilior mihi est visa, eo majorem utilitatem ex ea orturam esse, sum arbitratus. Quamdiu autem omne studium frustra in hoc negotio impendi, maxime dolui, methodum a Brounckero usitatam nusquam esse expositam, et forsitan omnino periisse.*“ Ferner sagt *Euler T. XI. p. 42*: „*Quamvis autem diu in hac methodo reperienda irritato conatu sum versatus, tamen in alium incidi modum interpolationes huiusmodi serierum per fractiones continuas absolvendi, qui mihi autem praebuit a Brounckerianis maxime diversas.*“ Die Merkwürdigkeit und das Interesse des Satzes, aus dem, wie wir sehen werden, sich mehrere wichtige Folgerungen ableiten lassen, und der Umstand, dass ein *Euler* den Beweis desselben für schwer hielt, mögen es entschuldigen, dass wir den Satz nebst einem von uns aufgefundenen Beweise für denselben im Folgenden mittheilen.

2.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit ganz einfachen Betrachtungen.

Es ist, wie man durch leichte Rechnung findet, immer

$$\frac{\frac{p_1}{1 + \frac{p_2}{1 + \frac{p_3}{1}}}}{1} = p_1 - \frac{p_1 p_2}{1 + p_2 + p_3}.$$

Folglich ist

$$\frac{\frac{p_1}{1 + \frac{p_2}{1 + \frac{p_3}{1 + \frac{p_4}{1 + \frac{p_5}{1}}}}}}{1} = p_1 - \frac{p_1 p_2}{1 + p_2 + p_3} - \frac{p_3 p_4}{1 + p_4 + p_5},$$

und auf ähnliche Art ist

$$\frac{p_1}{1 + \frac{p_2}{1 + \frac{p_3}{1 + \frac{p_4}{1 + \frac{p_5}{1 + \frac{p_6}{1 + \frac{p_7}{1}}}}}}} = p_1 - \frac{p_1 p_2}{1 + p_2 + p_3} - \frac{p_3 p_4}{1 + p_4 + p_5} - \frac{p_5 p_6}{1 + p_6 + p_7} .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Allgemein ist

$$\frac{p_1}{1 + \frac{p_2}{1 + \frac{p_3}{1 + \dots + \frac{p_{2n}}{1 + \frac{p_{2n+1}}{1}}}}} = p_1 - \frac{p_1 p_2}{1 + p_2 + p_3} - \frac{p_3 p_4}{1 + p_4 + p_5} - \dots - \frac{p_{2n-1} p_{2n}}{1 + p_{2n} + p_{2n+1}} .$$

3.

Man setze jetzt

$$f(x) = 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1+x} + \frac{\frac{9}{4}x^2}{1+x} + \frac{\frac{25}{4}x^2}{1+x} + \dots + \frac{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 x^2}{1+x} .$$

Bestimmt man nun die Grössen

aus den Gleichungen $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_{2n+1}$

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, \\ p_1 p_2 &= -\frac{1}{2}x, \\ p_2 + p_3 &= x, \\ p_3 p_4 &= -\frac{9}{4}x^2, \\ p_4 + p_5 &= x, \\ p_5 p_6 &= -\frac{25}{4}x^2 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$p_{2n-1} p_{2n} = - \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 x^2,$$

$$p_{2n} + p_{2n+1} = x;$$

so erhält man

$$- \frac{1}{2} x + p_3 = x,$$

$$\frac{3}{2} x p_4 = - \frac{9}{4} x^2,$$

$$- \frac{5}{2} x + p_5 = x,$$

$$\frac{5}{2} x p_6 = - \frac{25}{4} x^2,$$

u. s. w.

$$p_1 = 1;$$

$$p_2 = - \frac{1}{2} x;$$

$$p_3 = \frac{3}{2} x;$$

$$p_4 = - \frac{3}{2} x;$$

$$p_5 = \frac{5}{2} x;$$

$$p_6 = - \frac{5}{2} x;$$

u. s. w.

$$\frac{2n-1}{2} x p_{2n} = - \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 x^2, \quad p_{2n} = - \frac{2n-1}{2} x;$$

$$- \frac{2n-1}{2} x + p_{2n+1} = x, \quad p_{2n+1} = \frac{2n+1}{2} x.$$

Also ist nach 2.

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x} + \frac{\frac{3}{2}x}{1 - \frac{3}{2}x} + \frac{\frac{5}{2}x}{1 - \frac{5}{2}x} + \dots$$

$$- \frac{\frac{2n-1}{2}x}{1 + \frac{2n+1}{2}x}.$$

4.

Ferner sey

$$\phi(x) = 1 - \frac{\frac{1}{2}x}{1-x} + \frac{\frac{9}{4}x^2}{1-x} + \frac{\frac{25}{4}x^2}{1-x} + \dots$$

$$+ \frac{\left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 x^2}{1-x} + \frac{\frac{(2n+1)^2}{2} x^2}{1+(2n+1)x},$$

und man bestimme nun die Grössen

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_{2n+3}$$

aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, \\ p_1 p_2 &= \frac{1}{2}x, \\ p_2 + p_3 &= -x, \\ p_3 p_4 &= -\frac{9}{4}x^2, \\ p_4 + p_5 &= -x, \\ p_5 p_6 &= -\frac{25}{4}x^2, \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} p_{2n} + p_{2n+1} &= -x, \\ p_{2n+1} p_{2n+2} &= -\frac{(2n+1)^2}{2}x^2, \end{aligned}$$

$$p_{2n+2} + p_{2n+3} = (2n+1)x;$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + p_3 &= -x, \\ -\frac{3}{2}x p_4 &= -\frac{9}{4}x^2, \\ \frac{3}{2}x + p_5 &= -x, \\ -\frac{5}{2}x p_6 &= -\frac{25}{4}x^2, \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} p_1 &= 1; \\ p_2 &= \frac{1}{2}x; \\ p_3 &= -\frac{3}{2}x; \\ p_4 &= \frac{3}{2}x; \\ p_5 &= -\frac{5}{2}x; \\ p_6 &= \frac{5}{2}x; \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\frac{2n-1}{2}x + p_{2n+1} = -x, \quad p_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2}x;$$

$$-\frac{2n+1}{2}x p_{2n+2} = -\frac{(2n+1)^2}{2}x^2, \quad p_{2n+2} = (2n+1)x;$$

$$(2n+1)x + p_{2n+3} = (2n+1)x, \quad p_{2n+3} = 0.$$

Folglich ist nach 2.

$$\phi(x) = \frac{1}{1} + \frac{\frac{1}{2}x}{1} - \frac{\frac{3}{2}x}{1} + \frac{\frac{3}{2}x}{1} - \frac{\frac{5}{2}x}{1} + \dots + \frac{\frac{2n-1}{2}x}{1} - \frac{\frac{2n+1}{2}x}{1+(2n+1)x}.$$

5.

Wir bemerken nun, dass man den Kettenbruch

$$a + \frac{q_1}{1 +} \frac{q_2 x}{1 +} \frac{q_3 x}{1 +} \frac{q_4 x}{1 +} \dots + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x}$$

jederzeit in einen Kettenbruch von der Form

$$\frac{p_1}{1 +} \frac{p_2 x}{1 +} \frac{p_3 x}{1 +} \frac{p_4 x}{1 +} \dots + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x}$$

verwandeln kann.

Zu dem Ende setze man

$$a + \frac{q_1}{1 +} \frac{q_2 x}{1 +} \frac{q_3 x}{1 +} \dots + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = \frac{p_1}{1 +} \frac{p_2 x}{1 +} \frac{p_3 x}{1 +} \dots + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x};$$

so ist nach 2.

$$a + q_1 - \frac{q_1 q_2 x}{1 + q_2 x +} \frac{q_3 x}{1 +} \frac{q_4 x}{1 +} \dots + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = p_1 - \frac{p_1 p_2 x}{1 + p_2 x +} \frac{p_3 x}{1 +} \frac{p_4 x}{1 +} \dots + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x}.$$

Weil nun diese Gleichung für jedes x gelten soll; so muss

$$a + q_1 = p_1, \\ \frac{q_1 q_2}{1 + q_2 x +} \frac{q_3 x}{1 +} \frac{q_4 x}{1 +} \dots + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = \frac{p_1 p_2}{1 + p_2 x +} \frac{p_3 x}{1 +} \frac{p_4 x}{1 +} \dots + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x},$$

und, weil auch letztere Gleichung für jedes x gelten soll,

$$q_1 q_2 = p_1 p_2, \\ q_2 + \frac{q_3}{1 +} \frac{q_4 x}{1 +} \dots + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = p_2 + \frac{p_3}{1 +} \frac{p_4 x}{1 +} \dots + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x},$$

d. i. nach 2.

$$q_2 + q_3 = \frac{q_3 q_4 x}{1 + q_4 x} + \frac{q_5 x}{1 + \dots} + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = p_2 + p_3 = \frac{p_3 p_4 x}{1 + p_4 x} + \frac{p_5 x}{1 + \dots} + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x}$$

seyn. Aber auch die letzte Gleichung soll für jedes x gelten. Also muss

$$q_2 + q_3 = p_2 + p_3, \\ \frac{q_3 q_4}{1 + q_4 x} + \frac{q_5 x}{1 + \dots} + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = \frac{p_3 p_4}{1 + p_4 x} + \frac{p_5 x}{1 + \dots} + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x},$$

folglich auch

$$q_3 q_4 = p_3 p_4, \\ q_4 + \frac{q_5}{1 + \dots} + \frac{q_6 x}{1 + \dots} + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = p_4 + \frac{p_5}{1 + \dots} + \frac{p_6 x}{1 + \dots} + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x},$$

d. i. nach 2.

$$q_4 + q_5 = \frac{q_5 q_6 x}{1 + q_6 x} + \frac{q_7 x}{1 + \dots} + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = p_4 + p_5 = \frac{p_5 p_6 x}{1 + p_6 x} + \frac{p_7 x}{1 + \dots} + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x}$$

seyn. Hieraus folgt wieder

$$q_4 + q_5 = p_4 + p_5, \\ \frac{q_5 q_6}{1 + q_6 x} + \frac{q_7 x}{1 + \dots} + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = \frac{p_5 p_6}{1 + p_6 x} + \frac{p_7 x}{1 + \dots} + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x};$$

also auch

$$q_5 q_6 = p_5 p_6, \\ q_6 + \frac{q_7}{1 + \dots} + \frac{q_8 x}{1 + \dots} + \frac{q_{2n-1} x}{1 + q_{2n} x} = p_6 + \frac{p_7}{1 + \dots} + \frac{p_8 x}{1 + \dots} + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Endlich kommt man auf

$$q_{2n-3} q_{2n-2} = p_{2n-3} p_{2n-2}, \\ q_{2n-2} + \frac{q_{2n-1}}{1 + q_{2n} x} = p_{2n-2} + \frac{p_{2n-1}}{1 + \dots} + \frac{p_{2n} x}{1 + p_{2n+1} x}$$

oder

$$q_{2n-2} + q_{2n-1} - \frac{q_{2n-1} q_{2n} x}{1 + q_{2n} x} = p_{2n-2} + p_{2n-1} - \frac{p_{2n-1} p_{2n} x}{1 + p_{2n} x + p_{2n+1} x}$$

und folglich

$$q_{2n-2} + q_{2n-1} = p_{2n-2} + p_{2n-1},$$

$$q_{2n-1} q_{2n} = p_{2n-1} p_{2n},$$

$$q_{2n} = p_{2n} + p_{2n+1}.$$

Aus den Gleichungen

$$a + q_1 = p_1,$$

$$q_1 q_2 = p_1 p_2,$$

$$q_2 + q_3 = p_2 + p_3,$$

$$q_3 q_4 = p_3 p_4,$$

$$q_4 + q_5 = p_4 + p_5,$$

u. s. w.

$$q_{2n-2} + q_{2n-1} = p_{2n-2} + p_{2n-1},$$

$$q_{2n-1} q_{2n} = p_{2n-1} p_{2n},$$

$$q_{2n} = p_{2n} + p_{2n+1}$$

lassen sich, wie man sieht, die Grössen

immer durch die Grössen $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_{2n+1}$

bestimmen.

6.

Es ist nun

$$\frac{1}{x + \frac{1}{f(x)}} = \frac{1}{1+x \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\frac{3}{2}x}{1 - \frac{\frac{5}{2}x}{1 + \frac{\frac{7}{2}x}{1 - \frac{\frac{9}{2}x}{1 + \frac{\frac{11}{2}x}{1 - \frac{\frac{13}{2}x}{1 + \frac{\frac{15}{2}x}{1 - \frac{\frac{17}{2}x}{1 + \frac{\frac{19}{2}x}{1 - \frac{\frac{2n-1}{2}x}}}}}}}}}} \right\}}$$

Setzt man

$$a = 1, \quad q_1 = -\frac{1}{2}, \quad q_2 = \frac{3}{2}, \quad q_3 = -\frac{5}{2}, \quad \dots \quad q_{2n-1} = -\frac{2n-1}{2}, \quad q_{2n} = \frac{2n+1}{2};$$

so ist nach 5.

$$p_1 = a + q_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} p_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}, \quad p_2 = -\frac{3}{2};$$

$$-\frac{3}{2} + p_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0, \quad p_3 = \frac{3}{2};$$

$$\frac{3}{2} p_4 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}, \quad p_4 = -\frac{5}{2};$$

$$-\frac{5}{2} + p_5 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0, \quad p_5 = \frac{5}{2};$$

$$\frac{5}{2} p_6 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}, \quad p_6 = -\frac{7}{2};$$

$$-\frac{7}{2} + p_7 = \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0, \quad p_7 = \frac{7}{2};$$

u. s. w.

u. s. w.

$$-\frac{2n-1}{2}$$

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right) = a - 1 + \frac{1}{2(a-1)+} \frac{9}{2(a-1)+} \frac{25}{2(a-1)+} \dots + \frac{(2n-1)^2}{2(a-1)+} \frac{(2n+1)^2}{a+2n+1}$$

und

$$F\left(\frac{1}{a}\right) = a + 1 + \frac{1}{2(a+1)+} \frac{9}{2(a+1)+} \frac{25}{2(a+1)+} \dots + \frac{(2n-1)^2}{2(a+1)+}$$

und nach dem Obigen ist immer

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right) \cdot F\left(\frac{1}{a}\right) = a^2.$$

8.

Nehmen wir nun an, dass $a > 1$ ist; so convergiren nach dem in der vorigen Abhandlung bewiesenen Satze die beiden Kettenbrüche

$$a - 1 + 1 : \{2(a - 1) + 9 : \{2(a - 1) + 25 : \{2(a - 1) + \dots,$$

$$a + 1 + 1 : \{2(a + 1) + 9 : \{2(a + 1) + 25 : \{2(a + 1) + \dots,$$

die wir respective durch K_a und K_{a+2} bezeichnen wollen, so dass also

$$K_a = a - 1 + 1 : \{2(a - 1) + 9 : \{2(a - 1) + 25 : \{2(a - 1) + \dots,$$

$$K_{a+2} = a + 1 + 1 : \{2(a + 1) + 9 : \{2(a + 1) + 25 : \{2(a + 1) + \dots$$

ist. Die Grössen K_a und K_{a+2} sind zwischen jeden zwei benachbarten Partialwerthen der entsprechenden Kettenbrüche enthalten; die benachbarten Partialwerthe kommen einander desto näher, je weiter man sie vom Anfange der Kettenbrüche entfernt nimmt, und können einander auch bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden, wenn man sie nur weit genug vom Anfange der Kettenbrüche entfernt nimmt, welches Alles aus dem in der vorigen Abhandlung bewiesenen Satze unmittelbar folgt.

Denken wir uns ferner in den beiden oben durch

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right) \text{ und } F\left(\frac{1}{a}\right)$$

bezeichneten Kettenbrüchen n unendlich gross angenommen; so liegen die entsprechenden Werthe von

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right) \text{ und } F\left(\frac{1}{a}\right)$$

nach einem sehr bekannten Elementarsatze von den Kettenbrüchen respective zwischen jeden zwei benachbarten Partialwerthen der beiden in's Unendliche fortlaufenden Kettenbrüche

$$a - 1 + 1 : \{2(a - 1) + 9 : \{2(a - 1) + 25 : \{2(a - 1) + \dots,$$

$$a + 1 + 1 : \{2(a + 1) + 9 : \{2(a + 1) + 25 : \{2(a + 1) + \dots,$$

und können folglich offenbar von den beiden Grössen

K_a und K_{a+2}

nicht verschieden seyn.

Weil nun nach 7. für jedes noch so grosse n

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right) \cdot F\left(\frac{1}{a}\right) = a$$

ist; so ist auch

$$K_a \cdot K_{a+2} = a^2,$$

vorausgesetzt nämlich, dass $a > 1$ ist.

Dies ist, dem Wesentlichen nach, der Satz, welchen *Euler*, als von *Wallis* gefunden, in dem Comm. Petrop. T. IX. p. 101. und T. XI. p. 32. ohne Beweis mittheilt. Die Einschränkung, dass $a > 1$ seyn muss, macht *Euler* nicht. Wie nothwendig aber diese Einschränkung ist, lässt sich auf folgende Art übersehen. Wäre z. B. $0 < a < 1$; so wären, wovon man sich durch eine einfache Betrachtung sogleich überzeugen wird, alle Partialwerthe des Kettenbruchs

$$a - 1 + 1 : \{ 2(a - 1) + 9 : \{ 2(a - 1) + 25 : \{ 2(a - 1) + \dots$$

negativ, dagegen alle Partialwerthe des Kettenbruchs

$$a + 1 + 1 : \{ 2(a + 1) + 9 : \{ 2(a + 1) + 25 : \{ 2(a + 1) + \dots$$

positiv, und doch sollten diese beiden Kettenbrüche das positive Product a^2 geben, welches offenbar ungereimt ist.

9.

Nach 8. ist nun für jedes a , welches grösser als die Einheit ist, wenn die dort eingeführten Zeichen auch hier ganz dieselbe Bedeutung behalten wie vorher,

$$K_a \cdot K_{a+2} = a^2,$$

$$K_{a+2} \cdot K_{a+4} = (a+2)^2,$$

$$K_{a+4} \cdot K_{a+6} = (a+4)^2,$$

$$K_{a+6} \cdot K_{a+8} = (a+6)^2,$$

u. s. w.

$$K_{a+4n} \cdot K_{a+4n+2} = (a+4n)^2.$$

Folglich ist

$$K_a \cdot K_{a+2} \cdot K_{a+4} \cdot K_{a+6} \dots K_{a+4n} \cdot K_{a+4n+2} \\ = a^2 (a+2)^2 (a+4)^2 (a+6)^2 \dots (a+4n)^2,$$

und

$$K_{a+2} \cdot K_{a+4} \cdot K_{a+6} \cdot K_{a+8} \dots K_{a+4n-2} \cdot K_{a+4n} \\ = (a+2)^2 (a+4)^2 (a+6)^2 (a+8)^2 \dots (a+4n-2)^2,$$

woraus sich durch Division

$$\frac{a^2 (a+4)^2 (a+8)^2 (a+12)^2 \dots (a+4n)^2}{(a+2)^2 (a+6)^2 (a+10)^2 (a+14)^2 \dots (a+4n-2)^2} = K_a \cdot K_{a+4n+2},$$

oder

$$K_a \cdot \frac{K_{a+4n+2}}{a+4n}$$

$$= a \cdot \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+10} \dots \frac{a+4n-4}{a+4n-2} \cdot \frac{a+4n}{a+4n-2}$$

ergiebt.

Nun ist aber

$$K_{a+4n+2} = a + 4n + 1 + \frac{1}{2(a + 4n + 1)} + \frac{9}{2(a + 4n + 1)} + \dots$$

Daher ist

$$K_{a+4n+2} = a + 4n + 1 + \psi(n),$$

wo $\psi(n)$ eine positive Grösse bezeichnet, die, wie sich auch die positive ganze Zahl n ändern mag, immer kleiner als die Einheit ist. Da nun

$$\frac{K_{a+4n+2}}{a+4n} = 1 + \frac{1}{a+4n} + \frac{\psi(n)}{a+4n}$$

ist; so sieht man, dass diese Grösse sich, wenn n wächst, der Einheit nähert, und derselben, wenn man nur n gross genug nimmt, beliebig nahe gebracht werden kann. Folglich ist nach dem Obigen

$$K_a = a \cdot \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+10} \dots \frac{a+4n-4}{a+4n-2} \cdot \frac{a+4n}{a+4n-2}$$

oder

$$a - 1 + 1 : \{ 2(a - 1) + 9 : \{ 2(a - 1) + 25 : \{ 2(a - 1) + \dots$$

$$= a \cdot \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+10} \dots \frac{a+4n-4}{a+4n-2} \cdot \frac{a+4n}{a+4n-2},$$

desto genauer, je grösser n ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur n gross genug nimmt.

Weil

$$\frac{a+4n}{a+4n-2} = \frac{1 + \frac{a}{4n}}{1 + \frac{a-2}{4n}}$$

ist, und sich folglich der Einheit immer mehr und mehr nähert, wenn n wächst, derselben auch beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist auch

$$a - 1 + 1 : \{ 2(a - 1) + 9 : \{ 2(a - 1) + 25 : \{ 2(a - 1) + \dots$$

$$= a \cdot \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+10} \dots \frac{a+4n-4}{a+4n-6} \cdot \frac{a+4n-4}{a+4n-2},$$

desto genauer, je grösser n ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur n gross genug nimmt.

Aus den beiden vorher für den Kettenbruch

$$a - 1 + 1 : \{ 2(a - 1) + 9 : \{ 2(a - 1) + 25 : \{ 2(a - 1) + \dots$$

gefundenen Ausdrücken erhellet, dass man das Product

$$a \cdot \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+10} \cdot \frac{a+12}{a+10} \dots$$

sowohl mit zwei gleichen Factoren im Nenner, als auch mit zwei gleichen Factoren im Zähler abbrechen kann, und dass daher für jedes die Einheit übersteigende a

$$a - 1 + 1 : \{ 2(a - 1) + 9 : \{ 2(a - 1) + 25 : \{ 2(a - 1) + \dots$$

$$= a \cdot \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+10} \cdot \frac{a+12}{a+10} \dots$$

ist, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur eine hinreichende Anzahl von Factoren des Products auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens bei der Berechnung des Werths dieses Products anwendet.

10.

Aus dem in 8. der vorigen Abhandlung bewiesenen Satze ergibt sich unmittelbar, dass, wenn x und k positive Grössen sind, die Reihe

$$\frac{1}{x}, -\frac{1}{x+k}, \frac{1}{x+2k}, -\frac{1}{x+3k}, \frac{1}{x+4k}, \dots$$

jederzeit convergent ist, also eine bestimmte Summe hat, die wir durch $f(x)$ bezeichnen und folglich

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x+2k} - \frac{1}{x+3k} + \frac{1}{x+4k} - \dots$$

setzen wollen.

Weil

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+k} \right\} + \left\{ \frac{1}{x+2k} - \frac{1}{x+3k} \right\} + \left\{ \frac{1}{x+4k} - \frac{1}{x+5k} \right\} + \dots$$

ist; so ist $f(x)$ offenbar positiv. Weil ferner

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+2k} \right\} - \left\{ \frac{1}{x+3k} - \frac{1}{x+4k} \right\} - \dots$$

ist; so ist

$$f(x) < \frac{1}{x},$$

und folglich

$$\frac{1}{f(x)} > x,$$

also $\frac{1}{f(x)} - x$ eine positive Grösse.

Nach einer analogen Bezeichnung ist

$$f(x+k) = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+2k} + \frac{1}{x+3k} - \frac{1}{x+4k} + \dots$$

Also ist

$$f(x) + f(x+k) = \frac{1}{x}$$

oder

$$1 - xf(x) - xf(x+k) = 0,$$

und folglich

$$1 - xf(x) - xf(x+k) + x^2 f(x) \cdot f(x+k) = x^2 f(x) \cdot f(x+k),$$

d. i.

Also ist

$$\{1 - xf(x)\} \{1 - xf(x+k)\} = x^2 f(x) \cdot f(x+k).$$

woraus sehr leicht

$$1 - xf(x) = \frac{x^2 f(x) \cdot f(x+k)}{1 - xf(x+k)},$$

$$\frac{1}{f(x)} - x = \frac{x^2}{\frac{1}{f(x+k)} - x} = \frac{x^2}{k + \frac{1}{f(x+k)} - (x+k)},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{1}{f(x)} - x = f_1(x),$$

folglich

$$\frac{1}{f(x+k)} - (x+k) = f_1(x+k)$$

setzen,

$$f_1(x) = \frac{x^2}{k + f_1(x+k)}$$

folgt, wobei vorzüglich zu beachten ist, dass nach dem Obigen $f_1(x)$ und $f_1(x+k)$ positive Grössen sind.

Auf diese Weise haben wir also

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x^2}{k + f_1(x+k)}, \\ f_1(x+k) &= \frac{(x+k)^2}{k + f_1(x+2k)}, \\ f_1(x+2k) &= \frac{(x+2k)^2}{k + f_1(x+3k)}, \\ f_1(x+3k) &= \frac{(x+3k)^2}{k + f_1(x+4k)}, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

und

$$f_1(x), f_1(x+k), f_1(x+2k), f_1(x+3k), \dots$$

sind sämmtlich positive Grössen.

Durch successive Substitution ergibt sich hieraus für jedes noch so grosse n

$$f_1(x) = \frac{x^2}{k + \frac{(x+k)^2}{k + \frac{(x+2k)^2}{k + \frac{(x+3k)^2}{k + \dots + \frac{(x+nk)^2}{k + f_1(x+(n+1)k)}}}},$$

wo $f_1(x+(n+1)k)$, wie gross man auch n annehmen mag, stets eine positive Grösse ist. Berücksichtigt man dies; so ergibt sich mittelst des in der vorigen Abhandlung bewiesenen Satzes sehr leicht

$$f_1(x) = \frac{x^2}{k+x} \cdot \frac{(x+k)^2}{k+x} \cdot \frac{(x+2k)^2}{k+x} \cdot \frac{(x+3k)^2}{k+x} \cdot \frac{(x+4k)^2}{k+x} \cdots,$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$f(x) = \frac{1}{x + f_1(x)}$$

ist,

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{x^2}{k+x} \cdot \frac{(x+k)^2}{k+x} \cdot \frac{(x+2k)^2}{k+x} \cdot \frac{(x+3k)^2}{k+x} \cdots},$$

11.

Bekanntlich kann man durch verschiedene Methoden völlig streng beweisen, dass

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

ist.*)

Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens geht aus der in 10. betrachteten Reihe hervor, wenn man $x=1$, $k=2$ setzt, welches verstatet ist, weil x und k jeden positiven Werth haben können. Also ist nach 10.

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \cdots}}}}}}$$

ein merkwürdiger, zuerst von Lord *Brouncker* gefundener Ausdruck für $\frac{1}{4}\pi$.

Setzt man nun in der in 9. bewiesenen merkwürdigen Gleichung $a=2$, welches verstatet ist, da a jeden Werth haben kann, welcher grösser als die Einheit ist; so erhält man

$$\begin{aligned} & 1 + 1 : \{ 2 + 9 : \{ 2 + 25 : \{ 2 + 49 : \{ 2 + 81 : \{ 2 + \cdots \} \} \} \} \} \\ &= 2 \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{14}{16} \cdot \frac{18}{16} \cdots \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdots \end{aligned}$$

*) Einen elementaren, d. h. die Differentialrechnung nicht voraussetzenden Beweis, den ich für völlig streng halte, habe ich in meinen *Elementen der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie in analytischer Darstellung*. Leipzig. 1837. §. 53. gegeben. Einen Beweis durch die Differentialrechnung s. m. in meinen *Elementen der Differential- und Integralrechnung*. Thl. I. Leipzig. 1837. §. 123. — §. 125.

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \dots,$$

welches der berühmte, in jeder Beziehung höchst merkwürdige, von *Wallis* gefundene Ausdruck für $\frac{1}{4}\pi$ ist, der sich also auf die obige Weise, wie wir glauben, völlig streng mittelst der Theorie der Kettenbrüche beweisen lässt. Man kann diesen merkwürdigen Ausdruck auch unter der folgenden Form darstellen:

$$\frac{1}{4}\pi = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \dots,$$

oder

$$\frac{1}{4}\pi = \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \left(1 - \frac{1}{49}\right) \left(1 - \frac{1}{81}\right) \dots$$

V.

Ueber die grösste Ellipse, welche drei oder vier der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Zu den interessantesten Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten gehören unstreitig die beiden folgenden:

Die grösste Ellipse zu bestimmen, welche drei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt;

und

Die grösste Ellipse zu bestimmen, welche vier der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Auch haben schon mehrere ausgezeichnete Geometer sich mit der Auflösung dieser Aufgaben beschäftigt, namentlich *Gauss*, *Pfaff* und *Mollweide* die zweite zum Gegenstande ihrer Untersuchungen gemacht, worüber man die *Monatliche Correspondenz. B. XXII. S. 112, 223, 227* nachzusehen hat. Die folgenden Entwicklungen stimmen mit diesen ausgezeichneten Untersuchungen nur in den Resultaten überein, und dürften sich vielleicht besonders dadurch den Mathematikern einigermassen empfehlen, dass ich bei denselben bloss die bekanntesten Formeln der analytischen Geometrie in Anwendung gebracht, mich überall der grössten Strenge und Bestimmtheit befleissigt, die beiden oben ausgesprochenen Aufgaben mit einander in Verbindung gesetzt, und vielleicht auch einige früher noch nicht bekannte Ausdrücke und Sätze entwickelt habe. Wenigstens hoffe ich, dass diese Abhandlung *angehenden* Mathematikern eine angenehme und nützliche Lecture gewähren, namentlich zur Uebung in der neuern analytischen Geometrie und der Lehre vom Grössten und Kleinsten dienen wird.

Die vollständige Auflösung der beiden obigen Aufgaben, welche wir hier zu geben versuchen wollen, macht es nöthig, dass wir einige allgemeine Untersuchungen über Ellipsen, die gegebene gerade Linien berühren, vorausschicken.

I. Zuerst wollen wir annehmen, dass die Gleichungen

$$1. \quad y = Ax + B, \quad y = A'x + B', \quad y = A''x + B''$$

dreier geraden Linien gegeben seyen, und dass aus einem gegebenen Punkte, dessen Coordinaten q, p seyn mögen, als Mittelpunkt eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschrieben werden solle.

Nehmen wir die Coordinaten immer rechtwinklig an, und bezeichnen die Coordinaten in Bezug auf das System der beiden Axen der gesuchten Ellipse durch x', y' , den Winkel aber, unter welchem der positive Theil der Axe der x' gegen die Axe der x geneigt ist, indem wir diesen Winkel immer vom positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° zählen, durch ϕ ; so ist nach den bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung, mittelst welcher man von einem rechtwinkligen Systeme zu einem andern beliebigen rechtwinkligen Systeme überzugehen pflegt:

$$2. \quad \begin{cases} x = q + x' \cos \phi - y' \sin \phi, \\ y = p + x' \sin \phi + y' \cos \phi. \end{cases}$$

Bezieht man also die Gleichungen der drei gegebenen geraden Linien auf das neue Coordinatensystem; so werden dieselben:

$$\begin{aligned} p + x' \sin \phi + y' \cos \phi &= A(q + x' \cos \phi - y' \sin \phi) + B, \\ p + x' \sin \phi + y' \cos \phi &= A'(q + x' \cos \phi - y' \sin \phi) + B', \\ p + x' \sin \phi + y' \cos \phi &= A''(q + x' \cos \phi - y' \sin \phi) + B''; \end{aligned}$$

oder

$$3. \quad \begin{cases} y' = \frac{A \cos \phi - \sin \phi}{A \sin \phi + \cos \phi} x' + \frac{Aq + B - p}{A \sin \phi + \cos \phi}, \\ y' = \frac{A' \cos \phi - \sin \phi}{A' \sin \phi + \cos \phi} x' + \frac{A'q + B' - p}{A' \sin \phi + \cos \phi}, \\ y' = \frac{A'' \cos \phi - \sin \phi}{A'' \sin \phi + \cos \phi} x' + \frac{A''q + B'' - p}{A'' \sin \phi + \cos \phi}; \end{cases}$$

und folglich nach der Theorie der Ellipse, weil die gesuchte Ellipse, deren beide Halbachsen wir durch θ , θ' bezeichnen wollen, die drei gegebenen geraden Linien berühren soll:

$$4. \quad \begin{cases} (A \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (Aq + B - p)^2, \\ (A' \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A' \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (A'q + B' - p)^2, \\ (A'' \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A'' \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (A''q + B'' - p)^2. \end{cases}$$

In diesen drei Gleichungen ist eigentlich schon die vollständige Auflösung unsers Problems enthalten, weil in denselben bloss die drei unbekannten Grössen ϕ , θ , θ' , durch welche Lage und Grösse der gesuchten Ellipse bestimmt wird, vorkommen. Man müsste also die drei unbekannten Grössen ϕ , θ , θ' durch Elimination aus den drei obigen Gleichungen bestimmen, welches aber auf eine sehr verwickelte Rechnung führen würde. Deshalb ist es nöthig, die drei obigen Gleichungen zu vereinfachen, wozu man durch die folgenden Betrachtungen gelangt.

Nimmt man nämlich nach und nach jede der drei gegebenen geraden Linien, die wir der Kürze wegen mittelst der in ihren Gleichungen enthaltenen Constanten durch AB , $A'B'$, $A''B''$ bezeichnen wollen, selbst als Axe der x an, und bezeichnet den Winkel, unter welchem in jedem dieser drei Systeme der als positiv angenommene Theil der Axe 2θ der gesuchten Ellipse gegen die Axe der x geneigt ist, indem man diesen Winkel in jedem Systeme ganz auf dieselbe Weise nimmt, wie den oben durch ϕ bezeichneten Winkel, respective durch ψ , ψ' , ψ'' , die Ordinate des Mittelpunkts der gesuchten Ellipse in jedem der drei in Rede stehenden Coordinatensysteme aber respective durch p , p' , p'' ; so ergeben sich aus den drei obigen Hauptgleichungen unsers Problems auf der Stelle die drei folgenden Gleichungen:

$$5. \quad \begin{cases} \theta^2 \sin^2 \psi + \theta'^2 \cos^2 \psi = p^2, \\ \theta^2 \sin^2 \psi' + \theta'^2 \cos^2 \psi' = p'^2, \\ \theta^2 \sin^2 \psi'' + \theta'^2 \cos^2 \psi'' = p''^2; \end{cases}$$

die aber, wenn wir, wie es die Natur der Aufgabe fordert, p , p' , p'' als bekannt betrachten, die fünf unbekannten Grössen ψ , ψ' , ψ'' , θ , θ' enthalten, zwischen denen also, wenn ihre Bestimmung möglich seyn soll, noch zwei Gleichungen gegeben seyn müssen.

Wir wollen nun, wenn in Fig. 2. AB , $A'B'$, $A''B''$ die drei gegebenen Linien sind, als die positive Seite jeder dieser drei Linien diejenige annehmen, welche von der entsprechenden Linie an nach dem innern Raume des von allen drei Linien eingeschlosse-

nen Dreiecks hin liegt; die positiven Richtungen der drei Linien AB , $A'B'$, $A''B''$ sollen die durch die natürliche Folge der Buchstaben AB , $A'B'$, $A''B''$ angedeuteten Richtungen seyn. Unter ϕ , ϕ' , ϕ'' wollen wir die drei, 180° nicht übersteigenden, Winkel verstehen, welche die Axe 2θ der gesuchten Ellipse mit den drei Linien AB , $A'B'$, $A''B''$ einschliesst, wobei aber zu näherer Bestimmung dieser Winkel noch zu bemerken ist, dass dieselben, wenn man sich jede der drei Linien AB , $A'B'$, $A''B''$ durch ihren Durchschnittspunkt mit der Linie 2θ , und ebenso auch letztere durch dieselben Durchschnittspunkte in zwei Theile getheilt denkt, jederzeit von den Theilen der Linien AB , $A'B'$, $A''B''$, welche von den in Rede stehenden Durchschnittspunkten an nach den positiven Richtungen dieser Linien hin liegen, und den auf den positiven Seiten der Linien AB , $A'B'$, $A''B''$ liegenden Theilen der Linie 2θ eingeschlossen werden. Die Ordinaten p , p' , p'' sind natürlich positiv oder negativ, je nachdem sie auf den positiven oder negativen Seiten der Linien liegen, auf welchen sie senkrecht stehen. Dies vorausgesetzt, erhellet nun mittelst des Obigen sogleich auch die Richtigkeit der drei Gleichungen

$$6. \begin{cases} \theta^2 \sin \phi^2 + \theta'^2 \cos \phi^2 = p^2, \\ \theta^2 \sin \phi'^2 + \theta'^2 \cos \phi'^2 = p'^2, \\ \theta^2 \sin \phi''^2 + \theta'^2 \cos \phi''^2 = p''^2; \end{cases}$$

welche die fünf unbekannten Grössen ϕ , ϕ' , ϕ'' , θ , θ' enthalten, zwischen denen also noch zwei Gleichungen gegeben seyn müssen, wenn ihre vollständige Bestimmung möglich seyn soll. Bezeichnet man nun aber die drei innern Winkel des von den drei gegebenen Linien gebildeten Dreiecks, so wie sie den Linien AB , $A'B'$, $A''B''$ gegenüberstehen, respective durch α , β , γ ; so wird man sich leicht überzeugen, dass, welche Lage auch die in Fig. 2. durch MN bezeichnete Linie 2θ gegen die drei Linien AB , $A'B'$, $A''B''$ haben mag, doch immer

$$7. \begin{cases} \sin \phi'^2 = \sin(\phi + \gamma)^2, & \cos \phi'^2 = \cos(\phi + \gamma)^2; \\ \sin \phi''^2 = \sin(\phi - \beta)^2, & \cos \phi''^2 = \cos(\phi - \beta)^2 \end{cases}$$

ist, und erhält nun hierdurch sogleich die bloss die drei unbekannten Grössen ϕ , θ , θ' enthaltenden Gleichungen

$$8. \begin{cases} \theta^2 \sin \phi^2 + \theta'^2 \cos \phi^2 = p^2, \\ \theta^2 \sin(\phi + \gamma)^2 + \theta'^2 \cos(\phi + \gamma)^2 = p'^2, \\ \theta^2 \sin(\phi - \beta)^2 + \theta'^2 \cos(\phi - \beta)^2 = p''^2; \end{cases}$$

welche zur Bestimmung der in Rede stehenden drei unbekannten Grössen völlig hinreichend sind.

Stellt man diese drei Gleichungen unter der Form

$$\begin{aligned} \theta^2 - (\theta^2 - \theta'^2) \cos \phi^2 &= p^2, \\ \theta^2 - (\theta^2 - \theta'^2) \cos(\phi + \gamma)^2 &= p'^2, \\ \theta^2 - (\theta^2 - \theta'^2) \cos(\phi - \beta)^2 &= p''^2, \end{aligned}$$

oder

$$8^*. \begin{cases} \theta^2 - p^2 = (\theta^2 - \theta'^2) \cos \phi^2, \\ \theta^2 - p'^2 = (\theta^2 - \theta'^2) \cos(\phi + \gamma)^2, \\ \theta^2 - p''^2 = (\theta^2 - \theta'^2) \cos(\phi - \beta)^2 \end{cases}$$

dar; so erhält man durch Division, um θ' zu eliminiren, auf der Stelle:

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - p'^2} = \frac{\cos \phi^2}{\cos(\phi + \gamma)^2},$$

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - p'^2} = \frac{\cos \phi^2}{\cos(\phi - \beta)^2};$$

oder

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - p'^2} = \left(\frac{\cos \phi}{\cos \phi \cos \gamma - \sin \phi \sin \gamma} \right)^2;$$

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - p''^2} = \left(\frac{\cos \phi}{\cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta} \right)^2;$$

oder

$$\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2} = (\cos \gamma - \sin \gamma \tan \phi)^2,$$

$$\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2} = (\cos \beta + \sin \beta \tan \phi)^2.$$

Hieraus folgt nun ferner

$$\cos \gamma - \sin \gamma \tan \phi = \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}},$$

$$\cos \beta + \sin \beta \tan \phi = \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}},$$

also

$$\sin \beta \sin \gamma \tan \phi = \sin \beta \cos \gamma - \sin \beta \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}},$$

$$\sin \beta \sin \gamma \tan \phi = -\cos \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}};$$

folglich

$$0 = \sin(\beta + \gamma) - \sin \beta \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}} - \sin \gamma \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}}.$$

Aber

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha.$$

Also

$$9. \quad \sin \alpha = \sin \beta \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}} + \sin \gamma \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}}.$$

Auf ganz ähnliche Art hat man

$$(\theta^2 - \theta'^2) \sin \phi^2 + \theta'^2 = p^2,$$

$$(\theta^2 - \theta'^2) \sin(\phi + \gamma)^2 + \theta'^2 = p'^2,$$

$$(\theta^2 - \theta'^2) \sin(\phi - \beta)^2 + \theta'^2 = p''^2;$$

oder

$$9^a. \quad \begin{cases} \theta'^2 - p^2 = -(\theta^2 - \theta'^2) \sin \phi^2, \\ \theta'^2 - p'^2 = -(\theta^2 - \theta'^2) \sin(\phi + \gamma)^2, \\ \theta'^2 - p''^2 = -(\theta^2 - \theta'^2) \sin(\phi - \beta)^2; \end{cases}$$

folglich durch Division, um θ zu eliminiren:

$$\frac{\theta'^2 - p^2}{\theta'^2 - p'^2} = \frac{\sin \phi^2}{\sin(\phi + \gamma)^2},$$

oder

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - p'^2} = \frac{\sin \phi^2}{\sin(\phi - \beta)^2};$$

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - p'^2} = \left(\frac{\sin \phi}{\sin \phi \cos \gamma + \cos \phi \sin \gamma} \right)^2,$$

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - p''^2} = \left(\frac{\sin \phi}{\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta} \right)^2;$$

oder

$$\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2} = (\cos \gamma + \sin \gamma \cot \phi)^2,$$

$$\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2} = (\cos \beta - \sin \beta \cot \phi)^2;$$

also

$$\cos \gamma + \sin \gamma \cot \phi = \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}},$$

$$\cos \beta - \sin \beta \cot \phi = \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}};$$

also

$$\sin \beta \sin \gamma \cot \phi = -\sin \beta \cos \gamma + \sin \beta \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}},$$

$$\sin \beta \sin \gamma \cot \phi = \cos \beta \sin \gamma - \sin \gamma \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}};$$

folglich

$$0 = -\sin(\beta + \gamma) + \sin \beta \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}} + \sin \gamma \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}};$$

also wie vorher

$$10. \sin \alpha = \sin \beta \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}} + \sin \gamma \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}}.$$

Daher haben wir jetzt zur Bestimmung von θ und θ die ihrer Form nach ganz mit einander übereinstimmenden Gleichungen:

$$\sin \alpha = \sin \beta \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}} + \sin \gamma \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}},$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \sqrt{\frac{\theta^2 - p'^2}{\theta^2 - p^2}} + \sin \gamma \sqrt{\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - p^2}};$$

und wollen daher jetzt überhaupt die Gleichung

$$11. \sin \alpha = \sin \beta \sqrt{\frac{x^2 - p'^2}{x^2 - p^2}} + \sin \gamma \sqrt{\frac{x^2 - p''^2}{x^2 - p^2}},$$

durch deren Wurzeln offenbar θ und θ bestimmt werden, aufzulösen suchen.

Stellt man diese Gleichung unter der Form

$$\sin \alpha \sqrt{x^2 - p^2} = \sin \beta \sqrt{x^2 - p'^2} + \sin \gamma \sqrt{x^2 - p''^2}$$

dar, und quadriert nun, um sie rational zu machen, auf beiden Seiten; so erhält man

$$\begin{aligned} & 2 \sin \beta \sin \gamma \sqrt{x^2 - p'^2} \cdot \sqrt{x^2 - p''^2} \\ = & (x^2 - p^2) \sin a^2 - (x^2 - p'^2) \sin \beta^2 - (x^2 - p''^2) \sin \gamma^2 \\ = & (\sin a^2 - \sin \beta^2 - \sin \gamma^2) x^2 \\ & - (p^2 \sin a^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2). \end{aligned}$$

Aber

$$\sin \gamma = \sin(a + \beta).$$

Also

$$\begin{aligned} & \sin a^2 - \sin \beta^2 - \sin \gamma^2 \\ = & \sin a^2 - \sin \beta^2 - (\sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta)^2 \\ = & \sin a^2 \sin \beta^2 - \sin \beta^2 - \cos a^2 \sin \beta^2 \\ & - 2 \sin a \cos a \sin \beta \cos \beta \\ = & - 2 \cos a^2 \sin \beta^2 - 2 \sin a \cos a \sin \beta \cos \beta \\ = & - 2 \cos a \sin \beta (\sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta) \\ = & - 2 \cos a \sin \beta \sin(a + \beta) = - 2 \cos a \sin \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

und folglich, wenn man nur die Buchstaben gehörig vertauscht, überhaupt:

$$12. \begin{cases} \sin a^2 - \sin \beta^2 - \sin \gamma^2 = - 2 \cos a \sin \beta \sin \gamma, \\ \sin \beta^2 - \sin a^2 - \sin \gamma^2 = - 2 \cos \beta \sin a \sin \gamma, \\ \sin \gamma^2 - \sin a^2 - \sin \beta^2 = - 2 \cos \gamma \sin a \sin \beta; \end{cases}$$

oder

$$13. \begin{cases} \sin \beta^2 + \sin \gamma^2 - \sin a^2 = 2 \cos a \sin \beta \sin \gamma, \\ \sin \gamma^2 + \sin a^2 - \sin \beta^2 = 2 \sin a \cos \beta \sin \gamma, \\ \sin a^2 + \sin \beta^2 - \sin \gamma^2 = 2 \sin a \sin \beta \cos \gamma. \end{cases}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} & 2 \sin \beta \sin \gamma \sqrt{x^2 - p'^2} \cdot \sqrt{x^2 - p''^2} \\ = & - 2x^2 \cos a \sin \beta \sin \gamma - (p^2 \sin a^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2), \end{aligned}$$

und, wenn man nun wieder auf beiden Seiten quadriert, nach einigen leichten Reductionen

$$\begin{aligned} & (p^2 \sin a^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2)^2 - 4p'^2 p''^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2 \\ = & 4x^4 \sin a^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2 - 4x^2 \left\{ \begin{aligned} & (p'^2 + p''^2) \sin \beta^2 \sin \gamma^2 \\ & + (p^2 \sin a^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2) \cos a \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$14. P = 4p'^2 p''^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2 - (p^2 \sin a^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2)^2$$

und

$$15. R = 2(p'^2 + p''^2) \sin \beta^2 \sin \gamma^2 + 2(p^2 \sin a^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2) \cos a \sin \beta \sin \gamma;$$

so wird unsere obige Gleichung:

$$16. 4x^4 \sin a^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2 - 2Rx^2 + P = 0.$$

P und R lassen sich auf verschiedene Arten ausdrücken, von denen wir jetzt die wichtigsten kennen lernen wollen.

Zuerst ergiebt sich durch leichte Rechnung auf der Stelle

$$17. \quad P = 2p^2 p'^2 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 + 2p^2 p''^2 \sin \alpha^2 \sin \gamma^2 + 2p'^2 p''^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2 \\ - p^4 \sin \alpha^4 - p'^4 \sin \beta^4 - p''^4 \sin \gamma^4.$$

Durch Zerlegung in Factoren erhält man aber

$$\begin{aligned} P &= (2p' p'' \sin \beta \sin \gamma + p^2 \sin \alpha^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2) \\ &\times (2p' p'' \sin \beta \sin \gamma - p^2 \sin \alpha^2 + p'^2 \sin \beta^2 + p''^2 \sin \gamma^2) \\ &= \{p^2 \sin \alpha^2 - (p'^2 \sin \beta^2 - 2p' p'' \sin \beta \sin \gamma + p''^2 \sin \gamma^2)\} \\ &\times \{(p' \sin \beta^2 + 2p' p'' \sin \beta \sin \gamma + p''^2 \sin \gamma^2)^2 - p^2 \sin \alpha^2\} \\ &= \{p^2 \sin \alpha^2 - (p' \sin \beta - p'' \sin \gamma)^2\} \\ &\times \{(p' \sin \beta + p'' \sin \gamma)^2 - p^2 \sin \alpha^2\} \\ &= (p \sin \alpha + p' \sin \beta - p'' \sin \gamma) (p \sin \alpha - p' \sin \beta + p'' \sin \gamma) \\ &\times (p' \sin \beta + p'' \sin \gamma + p \sin \alpha) (p' \sin \beta + p'' \sin \gamma - p \sin \alpha); \end{aligned}$$

folglich

$$18. \quad P = (p \sin \alpha + p' \sin \beta + p'' \sin \gamma) \\ \times (p' \sin \beta + p'' \sin \gamma - p \sin \alpha) \\ \times (p \sin \alpha + p'' \sin \gamma - p' \sin \beta) \\ \times (p \sin \alpha + p' \sin \beta - p'' \sin \gamma).$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 19. \quad R &= 2(p'^2 + p''^2) \sin \beta^2 \sin \gamma^2 \\ &- (\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 - \sin \gamma^2) (p^2 \sin \alpha^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2) \\ &= -p^2 \sin \alpha^2 (\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 - \sin \gamma^2) \\ &- p'^2 \sin \beta^2 (\sin \beta^2 - \sin \alpha^2 - \sin \gamma^2) \\ &- p''^2 \sin \gamma^2 (\sin \gamma^2 - \sin \alpha^2 - \sin \beta^2) \\ &= 2p^2 \sin \alpha^2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &+ 2p'^2 \sin \beta^2 \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \\ &+ 2p''^2 \sin \gamma^2 \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \\ &= \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma), \end{aligned}$$

und wegen der Symmetrie dieses Ausdrucks ist offenbar

$$\begin{aligned} 20. \quad R &= 2(p'^2 + p''^2) \sin \beta^2 \sin \gamma^2 \\ &- (\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 - \sin \gamma^2) (p^2 \sin \alpha^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2) \\ &= 2(p^2 + p''^2) \sin \alpha^2 \sin \gamma^2 \\ &- (\sin \beta^2 - \sin \alpha^2 - \sin \gamma^2) (p'^2 \sin \beta^2 - p^2 \sin \alpha^2 - p''^2 \sin \gamma^2) \\ &= 2(p^2 + p'^2) \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \\ &- (\sin \gamma^2 - \sin \alpha^2 - \sin \beta^2) (p''^2 \sin \gamma^2 - p^2 \sin \alpha^2 - p'^2 \sin \beta^2) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 21. \quad R &= 2(p'^2 + p''^2) \sin \beta^2 \sin \gamma^2 \\ &+ 2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma (p^2 \sin \alpha^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2) \\ &= 2(p^2 + p''^2) \sin \alpha^2 \sin \gamma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma (p'^2 \sin \beta^2 - p^2 \sin \alpha^2 - p''^2 \sin \gamma^2) \\
 = & 2(p^2 + p'^2) \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \\
 & + 2 \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta (p''^2 \sin \gamma^2 - p^2 \sin \alpha^2 - p'^2 \sin \beta^2).
 \end{aligned}$$

Die Gleichung 16. lässt sich nun unter der folgenden merkwürdigen Form darstellen:

$$22. \quad x^4 - \frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} x^2 + \frac{P}{4 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2} = 0,$$

oder, wenn wir

$$23. \quad x^2 = z$$

setzen,

$$24. \quad z^2 - \frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} z + \frac{P}{4 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2} = 0.$$

Bezeichnen wir die beiden Wurzeln dieser Gleichung durch A und B ; so ist nach bekannten Sätzen von den Gleichungen

$$A + B = \frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

$$AB = \frac{P}{4 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2};$$

folglich

$$\begin{aligned}
 (A - B)^2 &= (A + B)^2 - 4AB \\
 &= \frac{(p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma)^2 - 4P}{4 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2},
 \end{aligned}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$4Q = (p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma)^2 - 4P$$

setzen,

$$A - B = \frac{\sqrt{Q}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

und folglich

$$25. \quad \begin{cases} A = \frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma + \sqrt{Q}}{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}, \\ B = \frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - \sqrt{Q}}{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}, \end{cases}$$

wo es nun ferner vorzüglich auf die Entwicklung und nähere Bestimmung der Grösse Q ankommt.

Es ist aber

$$\begin{aligned}
 4Q &= (p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma)^2 - 4P \\
 &= (p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma)^2 \\
 &\quad - 16p'^2 p''^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2 + 4(p^2 \sin \alpha^2 - p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2)^2 \\
 &= 4p^4 \sin \alpha^2 + 4p'^4 \sin \beta^2 + 4p''^4 \sin \gamma^2 \\
 &\quad + 2p^2 p'^2 (\sin 2\alpha \sin 2\beta - 4 \sin \alpha^2 \sin \beta^2) \\
 &\quad + 2p^2 p''^2 (\sin 2\alpha \sin 2\gamma - 4 \sin \alpha^2 \sin \gamma^2) \\
 &\quad + 2p'^2 p''^2 (\sin 2\beta \sin 2\gamma - 4 \sin \beta^2 \sin \gamma^2) \\
 &= 4p^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4p^4 \sin^2 a + 4p'^4 \sin^2 \beta + 4p''^4 \sin^2 \gamma \\
 &\quad + 8p^2 p'^2 \sin a \sin \beta (\cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta) \\
 &\quad + 8p^2 p''^2 \sin a \sin \gamma (\cos a \cos \gamma - \sin a \sin \gamma) \\
 &\quad + 8p'^2 p''^2 \sin \beta \sin \gamma (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) \\
 &= 4p^4 \sin^2 a + 4p'^4 \sin^2 \beta + 4p''^4 \sin^2 \gamma \\
 &\quad + 8p^2 p'^2 \sin a \sin \beta \cos(a + \beta) \\
 &\quad + 8p^2 p''^2 \sin a \sin \gamma \cos(a + \gamma) \\
 &\quad + 8p'^2 p''^2 \sin \beta \sin \gamma \cos(\beta + \gamma) \\
 &= 4p^4 \sin^2 a + 4p'^4 \sin^2 \beta + 4p''^4 \sin^2 \gamma \\
 &\quad - 8p^2 p'^2 \sin a \sin \beta \cos \gamma \\
 &\quad - 8p^2 p''^2 \sin a \cos \beta \sin \gamma \\
 &\quad - 8p'^2 p''^2 \cos a \sin \beta \sin \gamma \\
 &= 4p^4 \sin^2 a + 4p'^4 \sin^2 \beta + 4p''^4 \sin^2 \gamma \\
 &\quad - 4p^2 p'^2 (\sin^2 a + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma) \\
 &\quad - 4p^2 p''^2 (\sin^2 a + \sin^2 \gamma - \sin^2 \beta) \\
 &\quad - 4p'^2 p''^2 (\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 a) \\
 &= 4(p^2 - p'^2)(p^2 - p''^2) \sin^2 a \\
 &\quad + 4(p'^2 - p^2)(p'^2 - p''^2) \sin^2 \beta \\
 &\quad + 4(p''^2 - p^2)(p''^2 - p'^2) \sin^2 \gamma ;
 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
 26. \quad Q &= (p^2 - p'^2)(p^2 - p''^2) \sin^2 a \\
 &\quad + (p'^2 - p^2)(p'^2 - p''^2) \sin^2 \beta \\
 &\quad + (p''^2 - p^2)(p''^2 - p'^2) \sin^2 \gamma .
 \end{aligned}$$

Man kann aber Q noch auf einen andern merkwürdigen und wichtigen Ausdruck bringen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 4Q &= \{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin a \cos(\beta - \gamma)\}^2 \\
 &= 4p^4 \sin^2 a + 4p'^4 \sin^2 \beta + 4p''^4 \sin^2 \gamma \\
 &\quad - 8p^2 p'^2 \sin a \sin \beta \cos \gamma \\
 &\quad - 8p^2 p''^2 \sin a \cos \beta \sin \gamma \\
 &\quad - 8p'^2 p''^2 \cos a \sin \beta \sin \gamma \\
 &\quad - \{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin a \cos(\beta - \gamma)\}^2 \\
 &= 4p^4 \{\sin^2 a - \sin^2 a \cos^2(\beta - \gamma)\} \\
 &\quad + p'^4 \{4 \sin^2 \beta - \sin^2 2\beta\} \\
 &\quad + p''^4 \{4 \sin^2 \gamma - \sin^2 2\gamma\} \\
 &\quad - 4p^2 p'^2 \{2 \sin a \sin \beta \cos \gamma - \sin a \sin 2\beta \cos(\beta - \gamma)\} \\
 &\quad - 4p^2 p''^2 \{2 \sin a \cos \beta \sin \gamma - \sin a \sin 2\gamma \cos(\beta - \gamma)\} \\
 &\quad - 2p'^2 p''^2 \{4 \cos a \sin \beta \sin \gamma + \sin 2\beta \sin 2\gamma\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4p^4 \sin^2 a \sin(\beta - \gamma)^2 \\
 &\quad + 4p'^4 \sin^2 \beta \\
 &\quad + 4p''^4 \sin^2 \gamma \\
 &\quad - 8p^2 p'^2 \sin a \sin \beta^2 \sin(\beta - \gamma) \\
 &\quad + 8p^2 p''^2 \sin a \sin \gamma^2 \sin(\beta - \gamma) \\
 &\quad - 8p'^2 p''^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2 \\
 &= 4 \{ p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2 - p^2 \sin a \sin(\beta - \gamma) \}^2.
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$27. \quad 4Q = \{ p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin a \cos(\beta - \gamma) \}^2 \\
 + 4 \{ p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2 - p^2 \sin a \sin(\beta - \gamma) \}^2$$

oder

$$28. \quad 4Q = \{ 2p^2 \sin a \cos(\beta - \gamma) - p'^2 \sin 2\beta - p''^2 \sin 2\gamma \}^2 \\
 + 4 \{ p^2 \sin a \sin(\beta - \gamma) - p'^2 \sin \beta^2 + p''^2 \sin \gamma^2 \}^2,$$

und folglich $4Q$, als die Summe zweier Quadrate, jederzeit positiv, woraus ferner unmittelbar folgt, dass auch Q jederzeit positiv ist, und die Gleichung 24. also immer die beiden oben bestimmten reellen Wurzeln A und B hat.

Unmittelbar ergibt sich nun ferner aus dem Obigen, dass

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2 \sin 2a + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma + 2\sqrt{Q}}{\sin a \sin \beta \sin \gamma}}, \\
 &\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2 \sin 2a + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2\sqrt{Q}}{\sin a \sin \beta \sin \gamma}}
 \end{aligned}$$

die beiden Halbaxen der gesuchten Ellipse sind, und dass also jederzeit

$$29. \quad \begin{cases} \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2 \sin 2a + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma + 2\sqrt{Q}}{\sin a \sin \beta \sin \gamma}}, \\ \theta' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2 \sin 2a + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2\sqrt{Q}}{\sin a \sin \beta \sin \gamma}} \end{cases}$$

gesetzt werden kann, wo nun aber vorzüglich zu untersuchen ist, unter welchen Bedingungen diese Ausdrücke reell oder imaginär sind, d. h. unter welchen Bedingungen sich aus dem gegebenen Punkte als Mittelpunkt eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschreiben lässt, oder nicht.

Nach dem Obigen ist

$$AB = \frac{P}{4 \sin a^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2}.$$

Wäre nun P , also auch AB , negativ; so würde immer eine der beiden Grössen A und B , die nach dem Vorhergehenden beide reell sind, negativ und folglich jederzeit eine der beiden Halbaxen θ , θ' imaginär seyn. Soll sich also aus dem gegebenen Punkte als Mittelpunkt wirklich eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschreiben lassen; so muss die Grösse P nothwendig positiv seyn. Immer fragt sich nun aber noch, ob, wenn diese Bedingung erfüllt ist, A und B beide positiv, also θ und θ' beide reell sind.

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zuerst die Grösse P , welche sich bekanntlich durch das Product

$$P = (p \sin \alpha + p' \sin \beta + p'' \sin \gamma) \\ \times (p' \sin \beta + p'' \sin \gamma - p \sin \alpha) \\ \times (p \sin \alpha + p'' \sin \gamma - p' \sin \beta) \\ \times (p \sin \alpha + p' \sin \beta - p'' \sin \gamma)$$

darstellen lässt, näher betrachten.

Zuerst erhellet leicht, dass der erste Factor

$$p \sin \alpha + p' \sin \beta + p'' \sin \gamma$$

vorstehenden Products jederzeit positiv ist. Bezeichnet man nämlich die Seiten des von den drei gegebenen Linien gebildeten Dreiecks, so wie sie den Winkeln α , β , γ gegenüberstehen, respective durch a , b , c ; so ist

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma .$$

Also ist

$$p \sin \alpha + p' \sin \beta + p'' \sin \gamma = \sin \gamma \cdot \frac{p \sin \alpha + p' \sin \beta + p'' \sin \gamma}{\sin \gamma} \\ = \frac{\sin \gamma}{c} (pa + p'b + p''c) .$$

Durch eine sehr einfache Betrachtung überzeugt man sich aber, dass, wenn Δ den Flächeninhalt des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks bezeichnet, immer

$$30. \quad pa + p'b + p''c = 2\Delta ,$$

und folglich

$$p \sin \alpha + p' \sin \beta + p'' \sin \gamma = \frac{2\Delta \sin \gamma}{c} ,$$

dieser Factor des obigen Products also, weil c , $\sin \gamma$, Δ positive Grössen sind, stets positiv ist, wie behauptet wurde.

Da nach der Voraussetzung das Product P positiv ist; so muss jederzeit mindestens einer seiner drei letzten Factoren positiv seyn, und das Product der beiden noch übrigen Factoren ist dann ebenfalls positiv.

Setzen wir nun, dass z. B.

$$p \sin \alpha + p'' \sin \gamma - p' \sin \beta$$

der unter den drei letzten Factoren sich immer findende positive Factor sey; so ist *)

$$(p \sin \alpha + p' \sin \beta + p'' \sin \gamma) (p \sin \alpha + p'' \sin \gamma - p' \sin \beta) > 0 ,$$

$$(p' \sin \beta + p'' \sin \gamma - p \sin \alpha) (p \sin \alpha + p' \sin \beta - p'' \sin \gamma) > 0 ;$$

oder, wenn man wirklich multiplicirt:

$$2pp'' \sin \alpha \sin \gamma - (p'^2 \sin \beta^2 - p^2 \sin \alpha^2 - p''^2 \sin \gamma^2) > 0 ,$$

$$2pp'' \sin \alpha \sin \gamma + (p'^2 \sin \beta^2 - p^2 \sin \alpha^2 - p''^2 \sin \gamma^2) > 0 ;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$S = p'^2 \sin \beta^2 - p^2 \sin \alpha^2 - p''^2 \sin \gamma^2$$

setzen,

$$2pp'' \sin \alpha \sin \gamma - S > 0 , \quad 2pp'' \sin \alpha \sin \gamma + S > 0 .$$

*) Im Folgenden sollte eigentlich statt $>$ immer $\geq$ stehen; der Kürze wegen ist bloss $>$ gesetzt.

Addirt man, so findet man

$$4pp'' \sin \alpha \sin \gamma > 0,$$

und folglich, weil $\sin \alpha$ und $\sin \gamma$ stets positiv sind, auch

$$pp'' > 0,$$

d. i. pp'' positiv.

Nach 21. ist nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}R &= \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma (p'^2 \sin^2 \beta - p^2 \sin^2 \alpha - p''^2 \sin^2 \gamma) \\ &\quad + (p^2 + p''^2) \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma \\ &= S \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + (p^2 + p''^2) \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma, \end{aligned}$$

und es lässt sich jetzt beweisen, dass R positiv ist, nämlich unter der hier immer geltenden Voraussetzung, dass P positiv ist.

In dieser Beziehung sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem das Product $\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma$ positiv oder negativ ist.

Ist aber zuerst das Product

$$\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma$$

positiv; so ist, weil nach dem Obigen

$$2pp'' \sin \alpha \sin \gamma + S > 0$$

ist, auch

$$2pp'' \cos \beta \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma + S \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma > 0,$$

und folglich

$$S \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma > -2pp'' \cos \beta \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma;$$

also, wenn man auf beiden Seiten die Grösse

$$(p^2 + p''^2) \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma$$

addirt,

$$\frac{1}{2}R > (p^2 - 2pp'' \cos \beta + p''^2) \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma.$$

Weil aber

$$(p + p'')^2 - 4pp'' = (p - p'')^2,$$

und folglich immer

$$(p + p'')^2 - 4pp'' > 0$$

oder

$$(p + p'')^2 > 4pp''$$

ist; so ist um so mehr

$$(p + p'')^2 > 4pp'' \cos \frac{1}{2}\beta^2$$

oder

$$(p + p'')^2 - 4pp'' \cos \frac{1}{2}\beta^2 > 0,$$

d. i.

$$p^2 + 2pp'' (1 - 2\cos \frac{1}{2}\beta^2) + p''^2 > 0$$

oder

$$p^2 - 2pp'' \cos \beta + p''^2 > 0.$$

Also ist nach dem Obigen offenbar auch

$$\frac{1}{2}R > 0, \quad R > 0.$$

Ist dagegen das Product

$$\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma$$

negativ; so ist, weil nach dem Obigen

$$2pp'' \sin \alpha \sin \gamma - S > 0$$

ist,

und folglich

$$S \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma - 2pp'' \cos \beta \sin \alpha^2 \sin \gamma^2 > 0,$$

also, wenn man auf beiden Seiten die Grösse

$$(p^2 + p''^2) \sin \alpha^2 \sin \gamma^2$$

addirt,

$$\frac{1}{2}R > (p^2 + 2pp'' \cos \beta + p''^2) \sin \alpha^2 \sin \gamma^2.$$

Weil aber nach dem Vorhergehenden

$$(p + p'')^2 > 4pp''$$

ist; so ist um so mehr

$$(p + p'')^2 > 4pp'' \sin \frac{1}{2}\beta^2$$

oder

$$(p + p'')^2 - 4pp'' \sin \frac{1}{2}\beta^2 > 0,$$

d. i.

$$p^2 + 2pp'' (1 - 2\sin \frac{1}{2}\beta^2) + p''^2 > 0$$

oder

$$p^2 + 2pp'' \cos \beta + p''^2 > 0,$$

und folglich nach dem Obigen wieder

$$\frac{1}{2}R > 0, \quad R > 0.$$

Daher ist die Grösse R immer positiv, unter der Voraussetzung, dass P positiv ist, wie behauptet wurde.

Nach 19. ist nun

$$R = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma),$$

und das Product $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ ist stets positiv, da keiner der Winkel α, β, γ grösser als 180° ist. Folglich ist, unter der Voraussetzung, dass P positiv ist, die Grösse

$$p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma$$

stets positiv.

Aus 25. folgt

$$AB = \frac{(p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma)^2 - 4Q}{16 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2},$$

und AB ist nach dem Obigen positiv, wenn P positiv ist. Also ist unter derselben Voraussetzung

$$(p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma)^2 - 4Q$$

positiv, und hieraus folgt, weil die Grösse

$$p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma$$

positiv ist, durch eine sehr einfache Betrachtung auf der Stelle, dass die Grössen

$$p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma + 2\sqrt{Q},$$

$$p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2\sqrt{Q},$$

also auch die Grössen

$$\frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma + 2\sqrt{Q}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

$$\frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2\sqrt{Q}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

beide positiv, die Grössen

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma + 2\sqrt{Q}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}},$$

$$\theta' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2\sqrt{Q}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}}$$

folglich beide reell sind. Ist also P eine positive Grösse; so sind die für die beiden Halbaxen θ, θ' der gesuchten Ellipse im Obigen gefundenen Ausdrücke jederzeit reelle Grössen.

Es ist nun endlich noch übrig, den Winkel ϕ zu bestimmen. Bemerkt man zu dem Ende, dass

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &= 2 \sin \alpha (\cos \alpha - 2 \sin \beta \sin \gamma) \\ &= 2 \sin \alpha \{-\cos(\beta + \gamma) - 2 \sin \beta \sin \gamma\} \\ &= 2 \sin \alpha (-\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) \\ &= -2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma) \end{aligned}$$

ist; so ergibt sich sehr leicht

$$\theta^2 - p^2 = \frac{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma) + 2\sqrt{Q}}{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

$$\theta'^2 - p^2 = \frac{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma) - 2\sqrt{Q}}{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

und folglich

$$\frac{(\theta^2 - p^2)(\theta'^2 - p^2)}{\{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)\}^2 - 4Q} = \frac{16 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{16 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma},$$

d. i. nach 27.

$$(\theta^2 - p^2)(\theta'^2 - p^2) = - \frac{\{p'^2 \sin^2 \beta - p''^2 \sin^2 \gamma - p^2 \sin \alpha \sin(\beta - \gamma)\}^2}{4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}.$$

Also ist das Product

$$(\theta^2 - p^2)(\theta'^2 - p^2)$$

eine negative Grösse, und

$$\theta^2 - p^2 \text{ und } \theta'^2 - p^2$$

haben folglich entgegengesetzte, also

$$\theta^2 - p^2 \text{ und } p^2 - \theta'^2$$

gleiche Vorzeichen. Daher haben auch die Brüche

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - \theta'^2} \text{ und } \frac{p^2 - \theta'^2}{\theta^2 - \theta'^2}$$

gleiche Vorzeichen. Weil nun

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - \theta'^2} + \frac{p^2 - \theta'^2}{\theta^2 - \theta'^2} = 1$$

ist; so können die Brüche

$$\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - \theta'^2} \quad \text{und} \quad \frac{p^2 - \theta'^2}{\theta^2 - \theta'^2}$$

offenbar nicht beide negativ seyn, sondern müssen beide positiv seyn, wobei zugleich auch aus dem Obigen erhellet, dass keiner dieser beiden Brüche die Einheit übersteigt. Aus 8.* und 9.* ergeben sich also für $\cos \phi$, $\sin \phi$, $\tan \phi$ die folgenden reellen Ausdrücke

$$30. \quad \cos \phi = \sqrt{\frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - \theta'^2}}, \quad \sin \phi = \sqrt{\frac{p^2 - \theta'^2}{\theta^2 - \theta'^2}}, \quad \tan \phi = \sqrt{\frac{p^2 - \theta'^2}{\theta^2 - p^2}}.$$

Weil nun

$$\theta^2 - \theta'^2 = \frac{VQ}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

ist; so ist

$$31. \quad \cos \phi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2VQ + \{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)\}}{VQ}},$$

$$32. \quad \sin \phi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2VQ - \{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)\}}{VQ}},$$

$$33. \quad \tan \phi = \sqrt{\frac{2VQ - \{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)\}}{2VQ + \{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)\}}}.$$

Wegen des doppelten Zeichens, mit welchem man die Wurzelgrössen nehmen kann, erhält man für den 180° nicht übersteigenden positiven Winkel ϕ zwei Werthe, von denen der eine kleiner, der andere grösser als 90° ist, und man muss von diesen beiden Werthen immer denjenigen nehmen, welcher in Verbindung mit den schon gefundenen Werthen von θ und θ' den drei Gleichungen 8., oder 8.* oder 9.* genügt.

Es ist ferner

$$\begin{aligned} \cos 2\phi &= \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \\ &= \frac{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)}{2VQ}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin 2\phi^2 &= 4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ &= \frac{4Q - \{p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma - 2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)\}^2}{4Q}, \end{aligned}$$

d. i. nach 27.

$$\sin 2\phi^2 = \frac{\{p'^2 \sin \beta^2 - p''^2 \sin \gamma^2 - p^2 \sin \alpha \sin(\beta - \gamma)\}^2}{Q}.$$

Folglich ist

$$34. \quad \frac{1}{2} \tan 2\phi = \pm \frac{p^2 \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) - p'^2 \sin \beta^2 + p''^2 \sin \gamma^2}{2p^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma) - p'^2 \sin 2\beta - p''^2 \sin 2\gamma},$$

welches ein völlig rationaler Ausdruck für $\frac{1}{2} \tan 2\phi$ ist.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt der die drei gegebenen geraden Linien berührenden Ellipse, immer unter der Voraussetzung, dass das Product P positiv ist, durch E ; so ist nach der Theorie der Ellipse

$$35. E = \theta\theta\pi.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\theta\theta = \frac{\sqrt{P}}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

Also ist

$$36. E = \frac{\pi \sqrt{P}}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

wo man für P einen der aus dem Obigen bekannten Ausdrücke setzen kann.

Bezeichnen nun wie oben a, b, c die Seiten des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks; so ist

$$\frac{p \sin \alpha + p' \sin \beta + p'' \sin \gamma}{\sin \gamma} = \frac{pa + p'b + p''c}{c},$$

$$\frac{p' \sin \beta + p'' \sin \gamma - p \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{p'b + p''c - pa}{c},$$

$$\frac{p \sin \alpha + p'' \sin \gamma - p' \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{pa + p''c - p'b}{c},$$

$$\frac{p \sin \alpha + p' \sin \beta - p'' \sin \gamma}{\sin \gamma} = \frac{pa + p'b - p''c}{c}.$$

Weil nun nach 30.

$$pa + p'b + p''c = 2\Delta$$

ist, wo Δ den Flächeninhalt des von den Seiten a, b, c eingeschlossenen Dreiecks bezeichnet; so ist

$$p'b + p''c - pa = 2(\Delta - pa),$$

$$pa + p''c - p'b = 2(\Delta - p'b),$$

$$pa + p'b - p''c = 2(\Delta - p''c),$$

und folglich

$$\frac{P}{\sin \gamma^4} = \frac{16\Delta (\Delta - pa) (\Delta - p'b) (\Delta - p''c)}{c^4},$$

$$\sqrt{P} = \frac{4 \sin \gamma^2}{c^2} \sqrt{\Delta (\Delta - pa) (\Delta - p'b) (\Delta - p''c)}.$$

Also ist

$$E = \frac{2\pi \sin \gamma \sqrt{\Delta (\Delta - pa) (\Delta - p'b) (\Delta - p''c)}}{c^2 \sin \alpha \sin \beta},$$

oder, weil

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b}$$

ist,

$$37. E = \frac{2\pi \sqrt{\Delta (\Delta - pa) (\Delta - p'b) (\Delta - p''c)}}{bc \sin \alpha};$$

oder

oder, weil bekanntlich

$$bc \sin \alpha = 2\Delta$$

ist,

$$38. E = \pi \sqrt{\frac{(\Delta - pa)(\Delta - p'b)(\Delta - p''c)}{\Delta}},$$

ein offenbar sehr merkwürdiger Ausdruck für den Flächeninhalt der die drei gegebenen geraden Linien berührenden Ellipse.

Bezeichnet man die drei auf den Seiten a, b, c senkrecht stehenden Höhen des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks respective durch h, h', h'' ; so ist

$$\Delta = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bh' = \frac{1}{2}ch'',$$

und folglich

$$39. E = \pi \sqrt{\frac{abc(\frac{1}{2}h - p)(\frac{1}{2}h' - p')(\frac{1}{2}h'' - p'')}{\Delta}}.$$

Für Δ kann man in dieser Formel natürlich jeden der aus den Elementen der Geometrie bekannten Ausdrücke für den Flächeninhalt des ebenen Dreiecks setzen.

Wenn unsere Aufgabe möglich seyn soll; so muss, wie im Vorhergehenden ausführlich und in völliger Strenge gezeigt worden ist, die Grösse P positiv seyn, eine Bedingung, die sich nach dem Obigen offenbar darauf reducirt, dass das Product

$$(\frac{1}{2}h - p)(\frac{1}{2}h' - p')(\frac{1}{2}h'' - p'')$$

positiv seyn muss, wenn aus dem durch die Perpendikel p, p', p'' bestimmten Punkte als Mittelpunkt eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse sich soll beschreiben lassen. Diese Bedingung wollen wir jetzt auf einen geometrischen Ausdruck zu bringen suchen.

Zu dem Ende denke man sich, wie Fig. 3. zeigt, die Seiten des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks in a', b', c' halbt, und die Halbierungspunkte durch gerade Linien verbunden, welche offenbar den Seiten des in Rede stehenden Dreiecks parallel seyn werden. Dadurch entstehen mehrere in der Figur durch einzelne Buchstaben bezeichnete Räume, die wir jetzt, nebst den durch M, M', M'' bezeichneten Räumen, in Bezug auf die Frage, ob sich aus den Punkten derselben als Mittelpunkten Ellipsen, welche die drei gegebenen geraden Linien berühren, beschreiben lassen oder nicht, nach der Reihe einzeln betrachten wollen.

Was zuerst die Räume M, M', M'' betrifft; so erhellet sogleich, dass sich aus keinem Punkte derselben als Mittelpunkt eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschreiben lässt, indem z. B. für den Raum M die Grössen p', p'' negativ sind, p dagegen positiv und immer grösser als $\frac{1}{2}h$ ist, so dass also in diesem Falle die Grössen $\frac{1}{2}h' - p', \frac{1}{2}h'' - p''$ positiv sind, die Grösse $\frac{1}{2}h - p$ dagegen negativ, und folglich auch das Product

$$(\frac{1}{2}h - p)(\frac{1}{2}h' - p')(\frac{1}{2}h'' - p'')$$

negativ ist. Auf ganz ähnliche Art kann für die Räume M' und M'' geschlossen werden.

Schliessen wir für's Erste die in den geraden Linien, welche die Halbierungspunkte a', b', c' der Seiten des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks mit einander verbinden, liegenden Punkte von der Betrachtung ganz aus; so erhellet leicht, dass auch aus keinem Punkte der sechs durch die drei Buchstaben n, n', n'' bezeichneten Räume als Mittelpunkt eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschrieben werden kann. Für den an dem Punkte c' liegenden Raum n ist nämlich

z. B. p'' negativ, p und p' dagegen sind positiv, und zugleich ist klar, dass immer $p > \frac{1}{2}h$, $p' < \frac{1}{2}h'$ ist, dass also $\frac{1}{2}h - p$ negativ, $\frac{1}{2}h' - p'$ positiv, $\frac{1}{2}h'' - p''$ positiv, das Product

$$(\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p'')$$

folglich negativ ist, welches eben so leicht für jeden der übrigen in Rede stehenden Räume gezeigt werden kann.

Endlich lässt sich auch aus keinem Punkte der durch m, m', m'' bezeichneten Räume eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschreiben, indem z. B. für den Raum m die Grössen $\frac{1}{2}h' - p', \frac{1}{2}h'' - p''$ offenbar positiv sind, die Grösse $\frac{1}{2}h - p$ negativ, das Product

$$(\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p'')$$

folglich ebenfalls negativ ist, und etwas ganz Ähnliches in Bezug auf die Räume m' und m'' gezeigt werden kann.

Demnach bleiben uns bloss noch die Räume μ, μ', μ'', μ''' übrig. Im Raume μ sind die Grössen $\frac{1}{2}h - p, \frac{1}{2}h' - p', \frac{1}{2}h'' - p''$ alle drei positiv; im Raume μ' sind $\frac{1}{2}h' - p', \frac{1}{2}h'' - p''$ negativ, $\frac{1}{2}h - p$ ist positiv; im Raume μ'' sind $\frac{1}{2}h - p, \frac{1}{2}h'' - p''$ negativ, $\frac{1}{2}h' - p'$ ist positiv; im Raume μ''' sind $\frac{1}{2}h - p, \frac{1}{2}h' - p'$ negativ, $\frac{1}{2}h'' - p''$ ist positiv; also ist in allen drei Fällen das Product

$$(\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p'')$$

positiv, und man kann folglich aus jedem Punkte der Räume μ, μ', μ'', μ''' als Mittelpunkt eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschreiben.

Dass dies wenigstens in gewissem Sinne auch selbst noch für jeden Punkt in den die drei Punkte a', b', c' verbindenden Linien gilt, lässt sich leicht so übersehen. Für jeden der in Rede stehenden Punkte verschwindet offenbar das Product

$$(\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p''),$$

und folglich nach dem Obigen auch der Flächeninhalt E der Ellipse. In der That reducirt sich aber in jedem solchen Falle die Ellipse, welche die drei gegebenen geraden Linien berührt, auf eine gerade Linie, für den Punkt O nämlich z. B. auf die durch O gehende gerade Linie CD , welche den Punkt C mit der Linie AB verbindet, indem man sich durch eine höchst einfache geometrische Betrachtung sogleich überzeugt, dass die Linie CD von dem Punkte O halbt wird.

Es erhellet also jetzt, dass aus jedem in den Räumen μ, μ', μ'', μ''' liegenden Punkte als Mittelpunkt, ohne alle Ausnahme, eine die drei gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschrieben werden kann.

Nehmen wir jetzt und im Folgenden die von dem Mittelpunkte der die drei gegebenen geraden Linien berührenden Ellipse auf die Seiten des von diesen Linien gebildeten Dreiecks gefällten Perpendikel sämmtlich als positiv an; so ist für die vier Räume μ, μ', μ'', μ''' respective:

$$40. \quad E = \pi \sqrt{\frac{abc (\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p'')}{\Delta}},$$

$$41. \quad E = \pi \sqrt{\frac{abc (\frac{1}{2}h + p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p'')}{\Delta}},$$

$$42. \quad E = \pi \sqrt{\frac{abc (\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' + p') (\frac{1}{2}h'' - p'')}{\Delta}},$$

$$43. E = \pi \sqrt{\frac{abc (\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' + p'')}{\Delta}}.$$

II. Indem wir uns nun zu der Bestimmung der grössten die drei gegebenen geraden Linien berührenden Ellipse wenden, müssen wir jeden der Räume μ, μ', μ'', μ''' besonders betrachten.

Was nun zuerst den Raum μ betrifft; so ist für denselben nach dem Vorhergehenden

$$E = \pi \sqrt{\frac{abc (\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p'')}{\Delta}},$$

und E wird also, da π, abc und Δ constante Grössen sind, offenbar ein Maximum, wenn das Product

$$(\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p''),$$

oder, was offenbar dasselbe ist, das Product

$$(h - 2p) (h' - 2p') (h'' - 2p'')$$

ein Maximum wird, so dass wir also jetzt

$$\mu = (h - 2p) (h' - 2p') (h'' - 2p'')$$

setzen und untersuchen wollen, unter welchen Bedingungen diese Function ein Maximum wird.

Offenbar ist

$$2\Delta = ap + bp' + cp''$$

und

$$2\Delta = ah = bh' = ch'';$$

also, wenn man dividirt,

$$1 = \frac{ap}{ah} + \frac{bp'}{bh'} + \frac{cp''}{ch''},$$

d. i.

$$1 = \frac{p}{h} + \frac{p'}{h'} + \frac{p''}{h''},$$

oder

$$hh'h'' = ph'h'' + p'hh'' + p''hh',$$

und folglich

$$p'' = \frac{hh'h'' - ph'h'' - p'hh''}{hh'} = h'' - \frac{ph''}{h} - \frac{p'h''}{h'},$$

$$h'' - 2p'' = \left(\frac{2p}{h} + \frac{2p'}{h'} - 1 \right) h''.$$

Also ist

$$\mu = h'' (h - 2p) (h' - 2p') \left(\frac{2p}{h} + \frac{2p'}{h'} - 1 \right),$$

und folglich, wenn man in Bezug auf p und p' als unabhängige veränderliche Grössen differentiirt,

$$\frac{d\mu}{dp} = 4h'' (h' - 2p') \left(1 - \frac{2p}{h} - \frac{p'}{h'} \right),$$

$$\frac{d\mu}{dp'} = 4h'' (h - 2p) \left(1 - \frac{p}{h} - \frac{2p'}{h'} \right).$$

Daher hat man zur Bestimmung von p und p' offenbar die beiden Gleichungen

$$1 - \frac{2p}{h} - \frac{p'}{h'} = 0, \quad 1 - \frac{p}{h} - \frac{2p'}{h'} = 0,$$

aus denen sich

$$p = \frac{1}{3}h, \quad p' = \frac{1}{3}h'$$

ergiebt. Verbindet man hiermit die Gleichung

$$1 = \frac{p}{h} + \frac{p'}{h'} + \frac{p''}{h''};$$

so ergiebt sich

$$44. \quad p = \frac{1}{3}h, \quad p' = \frac{1}{3}h', \quad p'' = \frac{1}{3}h''.$$

Um nun aber zu entscheiden, ob für diese Werthe von p, p', p'' wirklich ein Maximum Statt findet, muss man die zweiten Differentialquotienten entwickeln, und erhält nach leichter Rechnung:

$$\frac{d^2\mu}{dp^2} = -\frac{8h''(h' - 2p')}{h}, \quad \frac{d^2\mu}{dp'^2} = -\frac{8h''(h - 2p)}{h'};$$

$$\frac{d^2\mu}{dp \, dp'} = -4h'' \cdot \frac{3hh' - 4ph' - 4p'h}{hh'};$$

so dass also für die obigen Werthe von p, p', p''

$$\frac{d^2\mu}{dp^2} = -\frac{8h'h''}{3h}, \quad \frac{d^2\mu}{dp'^2} = -\frac{8hh''}{3h'}, \quad \frac{d^2\mu}{dp \, dp'} = -\frac{4}{3}h'';$$

$$\left(\frac{d^2\mu}{dp \, dp'}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{dp^2} \cdot \frac{d^2\mu}{dp'^2} = -\frac{16}{3}h''h'';$$

folglich

$$\left(\frac{d^2\mu}{dp \, dp'}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{dp^2} \cdot \frac{d^2\mu}{dp'^2} < 0$$

ist, und die beiden Differentialquotienten

$$\frac{d^2\mu}{dp^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\mu}{dp'^2}$$

negativ sind. Daher sind die Bedingungen des Maximums vollständig erfüllt, und für

$$p = \frac{1}{3}h, \quad p' = \frac{1}{3}h', \quad p'' = \frac{1}{3}h''$$

wird also E in der That ein Maximum. Auch erhellet aus einem sehr bekannten Satze der Geometrie zugleich, dass der Mittelpunkt dieser grössten Ellipse der Schwerpunkt des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks ist.

In Bezug auf den Raum μ' ist ferner

$$E = \pi \sqrt{\frac{abc \left(\frac{1}{2}h + p\right) \left(\frac{1}{2}h' - p'\right) \left(\frac{1}{2}h'' - p''\right)}{\Delta}},$$

und man wird nun auf ähnliche Art wie vorher

$$\mu = (h + 2p)(h' - 2p')(h'' - 2p'')$$

setzen, und die Bedingungen aufsuchen, unter denen diese Function ein Maximum wird. In diesem Falle ist offenbar

$$2\Delta = -ap + bp' + cp'';$$

also weil auch

ist,

$$2\Delta = ah = bh' = ch''$$

$$1 = -\frac{ap}{ah} + \frac{bp'}{bh'} + \frac{cp''}{ch''},$$

d. i.

$$1 = -\frac{p}{h} + \frac{p'}{h'} + \frac{p''}{h''},$$

oder

$$hh'h'' = -ph'h'' + p'h'h'' + p''hh',$$

und folglich

$$p'' = \frac{hh'h'' + ph'h'' - p'h'h''}{hh'} = h'' + \frac{ph''}{h} - \frac{p'h''}{h'},$$

$$h'' - 2p'' = \left(-\frac{2p}{h} + \frac{2p'}{h'} - 1\right) h''.$$

Also ist

$$\mu = h''(h + 2p)(h' - 2p') \left(-\frac{2p}{h} + \frac{2p'}{h'} - 1\right),$$

und folglich

$$\frac{d\mu}{dp} = 4h''(h' - 2p') \left(-1 - \frac{2p}{h} + \frac{p'}{h'}\right),$$

$$\frac{d\mu}{dp'} = 4h''(h + 2p) \left(1 + \frac{p}{h} - \frac{2p'}{h'}\right).$$

Dies giebt zur Bestimmung von p und p' entweder die beiden Gleichungen

$$-1 - \frac{2p}{h} + \frac{p'}{h'} = 0, \quad h + 2p = 0,$$

oder die beiden Gleichungen

$$-1 - \frac{2p}{h} + \frac{p'}{h'} = 0, \quad 1 + \frac{p}{h} - \frac{2p'}{h'} = 0.$$

Aus dem ersten Systeme von Gleichungen folgt

$$p = -\frac{1}{2}h, \quad p' = 0;$$

und aus dem zweiten ergibt sich

$$p = -\frac{1}{3}h, \quad p' = \frac{1}{3}h'.$$

Keine von beiden Bestimmungen ist hier zulässig, weil p bekanntlich immer positiv ist. Also ist in dem Raume μ' überhaupt an gar keine grösste Ellipse zu denken, und dass ganz dasselbe auch von den Räumen μ'' und μ''' gilt, versteht sich nun von selbst. Uebrigens erhellt aus den diesen drei Räumen entsprechenden Ausdrücken 41., 42., 43. des Flächeninhalts der Ellipse, welche die drei gegebenen geraden Linien berührt, dass derselbe in jedem dieser drei Räume in's Unendliche wachsen kann, weil in jedem dieser drei Räume offenbar die Grössen p , p' , p'' in's Unendliche wachsen können.

Daher giebt es bloss in dem Raume μ eine grösste Ellipse, welche aus dem Schwerpunkte des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks als Mittelpunkt beschrieben ist, und nun näher bestimmt werden soll.

Was zunächst den Flächeninhalt der grössten Ellipse betrifft; so erhält man für denselben, weil

$$p = \frac{1}{3}h, \quad p' = \frac{1}{3}h', \quad p'' = \frac{1}{3}h'';$$

$\frac{1}{2}h - p = \frac{1}{6}h, \quad \frac{1}{2}h' - p' = \frac{1}{6}h', \quad \frac{1}{2}h'' - p'' = \frac{1}{6}h''$
ist, nach 40. leicht folgenden Ausdruck:

$$45. \quad E = \pi \sqrt{\frac{abc \, hh'h''}{216\Delta}}.$$

Nun ist aber

$$abchh'h'' = ah \cdot bh' \cdot ch'' = 8\Delta^3.$$

Also ist

$$46. \quad E = \frac{\pi\Delta}{\sqrt{27}} = \frac{\pi\Delta}{3\sqrt{3}}.$$

Setzt man

$$a + b + c = 2s;$$

so ist bekanntlich

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Folglich ist

$$47. \quad E = \frac{\pi \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{3\sqrt{3}}.$$

Nach 29. ist überhaupt

$$\theta^2 + \theta'^2 = \frac{p^2 \sin 2\alpha + p'^2 \sin 2\beta + p''^2 \sin 2\gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

Also ist im vorliegenden Falle

$$48. \quad \theta^2 + \theta'^2 = \frac{h^2 \sin 2\alpha + h'^2 \sin 2\beta + h''^2 \sin 2\gamma}{18 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

Aber

$$h = b \sin \gamma = c \sin \beta,$$

$$h' = c \sin \alpha = a \sin \gamma,$$

$$h'' = a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

Folglich

$$49. \quad \theta^2 + \theta'^2 = \frac{1}{9}(bc \cos \alpha + ac \cos \beta + ab \cos \gamma).$$

Nach bekannten trigonometrischen Formeln hat man ferner:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Also ist

$$\theta^2 + \theta'^2 = \frac{1}{18} \{ (b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) \}$$

d. i.

$$50. \quad \theta^2 + \theta'^2 = \frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Nun ist nach 35.

Also ist nach 46.

$$E = \theta\theta'\pi.$$

$$\theta\theta' = \frac{\Delta}{3\sqrt{3}},$$

oder

$$\theta^2\theta'^2 = \frac{\Delta^2}{27}.$$

Aber

$$\Delta^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin\alpha^2 = \frac{1}{16}\{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4\}.$$

Folglich

$$4\theta^2\theta'^2 = \frac{1}{108}\{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4\}.$$

Also nach leichter Rechnung

$$\begin{aligned} (\theta^2 - \theta'^2)^2 &= (\theta^2 + \theta'^2)^2 - 4\theta^2\theta'^2 \\ &= \frac{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}{81} \end{aligned}$$

und folglich

$$51. \theta^2 - \theta'^2 = \frac{1}{9}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, weil von jetzt an θ immer die grosse Halbaxe der Ellipse bezeichnen soll.

Aus 50. und 51. ergibt sich nun:

$$\theta^2 = \frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{18}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2},$$

$$\theta'^2 = \frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{18}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2};$$

und hieraus endlich

$$52. \theta = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\left\{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}\right\}},$$

$$53. \theta' = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\left\{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}\right\}},$$

die Quadratwurzeln, weil die Grössen θ, θ' ihrer Natur nach positiv sind, natürlich positiv genommen.

Nach 30. ist

$$\cos\phi^2 = \frac{\theta^2 - p^2}{\theta^2 - \theta'^2}, \quad \sin\phi^2 = -\frac{\theta'^2 - p^2}{\theta^2 - \theta'^2};$$

also ist

$$\cos 2\phi = \cos\phi^2 - \sin\phi^2 = \frac{\theta^2 + \theta'^2 - 2p^2}{\theta^2 - \theta'^2}.$$

Aber

$$\begin{aligned} \theta^2 + \theta'^2 - 2p^2 &= \frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{9}h^2 \\ &= \frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{9}b^2\sin\gamma^2 \\ &= \frac{1}{18}(a^2 - 3b^2 + c^2) + \frac{2}{9}b^2\cos\gamma^2 \\ &= \frac{1}{18}(a^2 - 3b^2 + c^2) + \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{18a^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - 2b^2c^2}{18a^2}$$

$$= \frac{(b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)}{18a^2}.$$

Folglich nach 51.

$$54. \cos 2\phi = \frac{(b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)}{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen.

Diese Formel, durch welche der Cosinus des doppelten Winkels ϕ bestimmt wird, lässt es unentschieden, ob dieser Winkel, der übrigens bekanntlich immer positiv ist und 180° nicht übersteigt, ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, so dass es also jetzt zunächst auf die Auffindung eines Criteriums ankommt, mittelst dessen man diese Frage immer sicher und mit möglichster Leichtigkeit beantworten kann. Zu einem solchen Criterium wird uns die Bemerkung führen, dass der Werth des Winkels ϕ immer der Gleichung

$$\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - \theta'^2} = \cos(\phi - \beta)^2$$

genügen muss.

Es ist

$$p''^2 = \frac{1}{9}h''^2 = \frac{1}{9}b^2 \sin^2 a^2 = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{9}b^2 \cos^2 a^2$$

$$= \frac{1}{9}b^2 \left\{ 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \right\} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{36c^2},$$

und folglich

$$p''^2 = \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}{36c^2}.$$

Also ist

$$\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - \theta'^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2 - 2c^2)c^2 + 2c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{36c^2},$$

und folglich nach 51.

$$\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - \theta'^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2 - 2c^2)c^2 + 2c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{4c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Nun ist ferner

$$\cos(\phi - \beta) = \cos\phi \cos\beta + \sin\phi \sin\beta;$$

folglich

$$\cos(\phi - \beta)^2 = \cos^2\phi \cos^2\beta + \sin^2\phi \sin^2\beta + 2\sin\phi \cos\phi \sin\beta \cos\beta$$

$$= (\cos^2\phi - \sin^2\phi) \cos^2\beta + \sin^2\phi + 2\sin\phi \cos\phi \sin\beta \cos\beta$$

$$= \cos 2\phi \cos^2\beta + \sin^2\phi + 2\sin\phi \cos\phi \sin\beta \cos\beta.$$

Weil

$\cos\beta$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

ist; so ist nach 54.

$$\cos 2\phi \cos \beta^2 = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2 \{ (b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2) \}}{8a^4 c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen.

Ferner ist nach 54.

$$\begin{aligned} \sin \phi^2 &= \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \\ &= \frac{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2} - (b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)}{4a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}}, \end{aligned}$$

die Quadratwurzel positiv genommen.

Folglich ist

$$\begin{aligned} &\cos 2\phi \cos \beta^2 + \sin \phi^2 \\ &= \frac{(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2) \{ (b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2) \} + 4a^4 c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}}{8a^4 c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}}, \end{aligned}$$

die Quadratwurzel positiv genommen.

Ferner haben wir

$$\begin{aligned} 4 \sin \phi^2 \cos \phi^2 &= \sin 2\phi^2 = 1 - \cos 2\phi^2 \\ &= \frac{4a^4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2) - \{ (b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2) \}^2}{4a^4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}, \end{aligned}$$

oder, wenn man den Zähler gehörig entwickelt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$4 \sin \phi^2 \cos \phi^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2 \{ 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4 \}}{4a^4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2)};$$

also

$$2 \sin \phi \cos \phi = \pm \frac{(b^2 - c^2) \sqrt{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}}.$$

Weil nun aber

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} \sin \beta^2 &= 1 - \cos \beta^2 = \frac{4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2 c^2} \\ &= \frac{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2 c^2}, \end{aligned}$$

und folglich

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{2ac},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, weil der Winkel β , als der Winkel eines ebenen Dreiecks, 180° nicht übersteigt.

Also ist

$$\sin \beta \cos \beta = \frac{(a^2 + c^2 - b^2) \sqrt{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{4a^2 c^2},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & 2 \sin \phi \cos \phi \sin \beta \cos \beta \\ = & \pm \frac{(b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) \{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4\}}{8a^4 c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}}, \end{aligned}$$

die Quadratwurzel positiv genommen.

Entwickelt man nun aus dem Bisherigen

$$\cos(\phi - \beta)^2$$

$$= \cos 2\phi \cos \beta^2 + \sin \phi^2 + 2 \sin \phi \cos \phi \sin \beta \cos \beta;$$

so ist der Nenner des aus dieser Entwicklung hervorgehenden Bruchs

$$8a^4 c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2},$$

die Quadratwurzel positiv genommen; der Zähler dagegen ist

$$\begin{aligned} & (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2) \{(b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)\} \\ & \pm (b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) \{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4\} \\ & + 4a^4 c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}, \end{aligned}$$

die Quadratwurzel ebenfalls positiv genommen.

Der rationale Theil des Zählers ist

$$\begin{aligned} & = (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2) \\ & \times \{(b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2) \mp (b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)\} \\ & \pm 2a^2 c^2 (b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) \\ & = (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2) \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & 2a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - 2b^2 c^2 \\ & \pm b^4 \pm c^4 \mp a^2 b^2 \pm a^2 c^2 \mp 2b^2 c^2 \end{aligned} \right\} \\ & \pm 2a^2 c^2 (b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2), \end{aligned}$$

und wird also, wenn man, welches offenbar zu dem einfachsten Resultat führt, deshalb zuerst die untern Zeichen nimmt,

$$\begin{aligned} & = 2a^2(a^2 - c^2)(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2) \\ & - 2a^2 c^2 (b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) \\ & = 2a^2 \left\{ \begin{aligned} & (a^2 - c^2)(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2) \\ & - c^2(b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) \end{aligned} \right\} \\ & = 2a^4(a^4 + b^4 + 2c^4 - 2a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2) \\ & = 2a^4 \{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2 - 2c^2)c^2\}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\cos(\phi - \beta)^2$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2 - 2c^2)c^2 + 2c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}}{4c^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}}$$

Da dieser Ausdruck nun ganz mit dem oben gefundenen Ausdrucke von

$$\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - \theta'^2}$$

übereinstimmt; so sieht man, dass man die untern Zeichen nehmen muss, wenn die Gleichung

$$\frac{\theta^2 - p''^2}{\theta^2 - \theta'^2} = \cos(\phi - \beta)^2$$

erfüllt seyn soll, wie es erforderlich ist.

Daher muss man überhaupt die untern Zeichen nehmen, und muss also

$$2 \sin \phi \cos \phi = - \frac{(b^2 - c^2) \sqrt{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}}$$

oder

$$\sin \phi \cos \phi = \frac{(c^2 - b^2) \sqrt{2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{4a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}},$$

wo die Quadratwurzeln positiv genommen sind, setzen.

Hieraus geht nun ganz unzweideutig hervor, dass $\sin \phi$ und $\cos \phi$ gleiche Zeichen haben, d. i. $\tan \phi$ positiv ist, wenn $c > b$ ist; dass dagegen $\sin \phi$ und $\cos \phi$ ungleiche Zeichen haben, d. i. $\tan \phi$ negativ ist, wenn $c < b$ ist. Daher ist der Winkel ϕ , welcher bekanntlich immer positiv ist und 180° nicht übersteigt, spitz oder stumpf, jenachdem $c > b$ oder $c < b$ ist. Mittelst dieses Criteriums kann man immer mit der grössten Leichtigkeit und völliger Bestimmtheit über die Art des Winkels ϕ urtheilen.

Mittelst der bekannten goniometrischen Formeln

$$\sin^2 \phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}, \quad \cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$$

ergeben sich nun aus 54. die folgenden Formeln:

55. $\sin \phi$

$$= \frac{1}{2a} \left\{ \frac{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2} - (b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

56. $\cos \phi$

$$= \pm \frac{1}{2a} \left\{ \frac{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2} + (b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

57. $\tan \phi$

$$= \pm \left\{ \frac{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2} - (b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)}{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2} + (b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

mit der Bestimmung, dass in den beiden letzten Formeln das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $c > b$ oder $c < b$ ist.

Endlich wollen wir nun auch noch die Lage der Berührungspunkte der grössten Ellipse mit den drei gegebenen geraden Linien bestimmen. Nehmen wir, um die Lage des Berührungspunktes der grössten Ellipse mit der Linie AB zu bestimmen, diese Linie selbst als Axe der x an; so müssen wir in den Gleichungen 1. und den daraus abgeleiteten $A = B = 0$ setzen. Die Coordinaten des Mittelpunkts der grössten Ellipse in Bezug auf das System der xy sollen durch q, p bezeichnet werden, und den positiven Theil der Axe 2θ der Ellipse wollen wir in der Richtung von N nach M (Fig. 2.) nehmen. Dann ist nach den Gleichungen 3.

$$y' = -x' \tan \phi - p \sec \phi$$

die Gleichung der Linie AB in Bezug auf das System der beiden Axen der Ellipse. Sind nun s, t die Coordinaten des Berührungspunktes der Ellipse mit der Linie AB in Bezug auf das System der beiden Axen; so ist nach der Theorie der Ellipse, die wir hier als aus den Elementen der Lehre von den Kegelschnitten bekannt voraussetzen,

$$58. \quad s = -\frac{\theta^2 \sin \phi}{p}, \quad t = \frac{\theta^2 \sin \phi^2 - p^2}{p \cos \phi}.$$

Also ist, wenn s_1 die Abscisse des Berührungspunktes der Ellipse mit der Linie AB in Bezug auf diese Linie selbst als Abscissenaxe bezeichnet, nach 2.

$$s_1 = q - \frac{\theta^2 \sin \phi}{p} \cos \phi - \frac{\theta^2 \sin \phi^2 - p^2}{p \cos \phi} \sin \phi,$$

d. i., wie man nach leichter Rechnung findet,

$$59. \quad s_1 = \frac{pq - (\theta^2 - p^2) \tan \phi}{p}.$$

Halbirt man die Seite $C'C''$ (Fig. 4.) des Dreiecks $CC'C''$ in D , zieht CD und setzt diese Linie der Kürze wegen $= \rho$; so ist nach bekannten trigonometrischen Formeln

$$\cos \psi = \frac{\rho^2 + \frac{1}{4}a^2 - c^2}{a\rho}, \quad -\cos \psi = \frac{\rho^2 + \frac{1}{4}a^2 - b^2}{a\rho},$$

und folglich

$$\rho^2 + \frac{1}{4}a^2 - c^2 = -\rho^2 - \frac{1}{4}a^2 + b^2,$$

woraus sich

$$60. \quad \rho = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$

folglich

$$\frac{1}{3}\rho = \frac{1}{6} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

ergiebt. Weil nun

$$p^2 = \frac{1}{9}h^2 = \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}{36a^2}$$

ist; so ist, wie man leicht findet,

$$\left(\frac{1}{3}\rho\right)^2 - p^2 = \frac{(c^2 - b^2)^2}{36a^2}.$$

Hieraus ergibt sich nun sehr leicht, dass, wenn man AB als Axe, C' als Anfang der Abscissen annimmt, die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks $CC'C''$, d. i. die Coordinaten des Mittelpunkts der grössten die drei gegebenen geraden Linien berührenden Ellipse,

$$61. \begin{cases} q = \frac{1}{2}a + \frac{c^2 - b^2}{6a} = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{6a}, \\ p = \frac{1}{6a} \sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4} \end{cases}$$

sind, wobei es sich, weil p immer positiv ist, von selbst versteht, dass in der zweiten Formel die Quadratwurzel positiv genommen werden muss.

Ferner ist

$$\begin{aligned} \theta^2 - p^2 &= \frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{18} \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2} \\ &\quad - \frac{1}{36a^2} \{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4\} \\ &= \frac{2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2} + (b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)}{36a^2}, \end{aligned}$$

und folglich nach 57.

$$\begin{aligned} &(\theta^2 - p^2) \tan \phi \\ &= \frac{\pm 1}{36a^2} \left\{ 2a^2 \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2} + (b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pm 1}{36a^2} \{4a^4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) - [(b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)]^2\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $c > b$ oder $c < b$ ist.

Nach leichter Rechnung findet man aber hieraus

$$(\theta^2 - p^2) \tan \phi = \frac{\pm 1}{36a^2} \{(b^2 - c^2)^2 (2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4)\}^{\frac{1}{2}},$$

indem man immer das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $c > b$ oder $c < b$ ist.

Da dies nun nichts weiter heisst, als $(\theta^2 - p^2) \tan \phi$ ist positiv oder negativ, jenachdem $c > b$ oder $c < b$ ist; so ist offenbar, indem man die Quadratwurzel aus

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4$$

positiv nimmt, in völliger Allgemeinheit

$$(\theta^2 - p^2) \tan \phi = \frac{(c^2 - b^2) \sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{36a^2},$$

und folglich nach 61.

$$\begin{aligned} &pq - (\theta^2 - p^2) \tan \phi \\ &= \frac{(3a^2 + c^2 - b^2) \sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{36a^2} \\ &\quad - \frac{(c^2 - b^2) \sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{36a^2} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}. \end{aligned}$$

Also ist nach 61.

$$\frac{pq - (\theta^2 - p^2) \tan \phi}{p} = \frac{1}{2}a,$$

d. i. nach 59.

$$62. s_1 = \frac{1}{2}a.$$

Hieraus ergibt sich also das höchst merkwürdige Resultat, dass die grösste Ellipse die Seite a des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks in ihrer Mitte berührt.

Da dies nun aber offenbar auch von den beiden andern Seiten des in Rede stehenden Dreiecks ganz auf dieselbe Art gelten muss; so haben wir jetzt überhaupt das folgende höchst merkwürdige Theorem:

Der Schwerpunkt S (Fig. 5.) eines beliebigen Dreiecks ABC ist der Mittelpunkt der grössten Ellipse, welche sich in dieses Dreieck beschreiben lässt, und die Seiten desselben werden von der grössten Ellipse in ihren Mittelpunkten A', B', C' berührt.

Auch erhellet, weil SA' , SB' , SC' Halbmesser der grössten Ellipse sind, aus einem sehr bekannten Elementar-Satze vom Dreieck auf der Stelle, dass die grösste Ellipse auch durch die Mittelpunkte A'' , B'' , C'' der Linien SA , SB , SC gehen muss, so dass man also jetzt überhaupt die sechs Punkte A' , B' , C' ; A'' , B'' , C'' kennt, durch welche die grösste Ellipse, welche sich in das Dreieck ABC beschreiben lässt, hindurch gehen muss.

III. Sind jetzt vier gerade Linien, deren Gleichungen

$$63. y = Ax + B, y = A'x + B', y = A''x + B'', y = A'''x + B'''$$

seyn mögen, von einer Ellipse zu berühren; so hat man, wie aus I. hervorgeht, die vier Gleichungen

$$64. \begin{cases} (A \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (Aq + B - p)^2, \\ (A' \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A' \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (A'q + B' - p)^2, \\ (A'' \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A'' \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (A''q + B'' - p)^2, \\ (A''' \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A''' \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (A'''q + B''' - p)^2, \end{cases}$$

welche die fünf unbestimmten Grössen ϕ , θ , θ' , q , p enthalten, zu erfüllen. Dass die Symbole ϕ , θ , θ' , q , p die ihnen in I. beigelegte Bedeutung auch hier behalten, braucht wohl kaum erwähnt zu werden, indem nur der einzige Unterschied Statt findet, dass q , p , welche in I. bekannte und völlig bestimmte Grössen bezeichneten, hier ebenfalls unbestimmt gelassen werden müssen, jetzt aber gleich näher bestimmt werden sollen. Aus den obigen vier Gleichungen kann man nämlich die drei Grössen ϕ , θ , θ' eliminiren, und wird dadurch eine Gleichung zwischen q und p erhalten, welche die Gleichung des geometrischen Orts der Mittelpunkte aller die vier gegebenen geraden Linien berührenden Ellipsen seyn wird, so dass also hieraus schon im Allgemeinen hervorgeht, dass die Mittelpunkte aller, vier gegebene gerade Linien berührenden Ellipsen in einer bestimmten Linie liegen, deren Natur nun zunächst bestimmt werden muss, zu welchem Ende wir die drei Grössen ϕ , θ , θ' aus den vier obigen Gleichungen wirklich eliminiren müssen.

Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir die Linie $A'''B'''$ selbst als Axe der x annehmen, wodurch die Constanten A''' , B''' beide verschwinden, und unsere vier obigen Gleichungen also die folgende einfachere Gestalt annehmen:

$$65. \begin{cases} (A \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (Aq + B - p)^2, \\ (A' \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A' \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (A'q + B' - p)^2, \\ (A'' \cos \phi - \sin \phi)^2 \theta^2 + (A'' \sin \phi + \cos \phi)^2 \theta'^2 = (A''q + B'' - p)^2, \\ \sin^2 \phi \theta^2 + \cos^2 \phi \theta'^2 = p^2; \end{cases}$$

oder der Abkürzung wegen

$$66. \begin{cases} \Phi^2 \theta^2 + \Phi_1^2 \theta^2 = P^2, \\ \Phi'^2 \theta^2 + \Phi_1'^2 \theta^2 = P'^2, \\ \Phi''^2 \theta^2 + \Phi_1''^2 \theta^2 = P''^2, \\ \sin \phi^2 \theta^2 + \cos \phi^2 \theta^2 = p^2, \end{cases}$$

wo die Bedeutung der eingeführten Symbole von selbst erhellen wird.

Aus der vierten Gleichung ergibt sich

$$\theta^2 = \frac{p^2 - \theta^2 \sin \phi^2}{\cos \phi^2},$$

so dass uns also jetzt bloss noch die drei folgenden Gleichungen bleiben:

$$67. \begin{cases} \Phi^2 \theta^2 + \Phi_1^2 \cdot \frac{p^2 - \theta^2 \sin \phi^2}{\cos \phi^2} = P^2, \\ \Phi'^2 \theta^2 + \Phi_1'^2 \cdot \frac{p^2 - \theta^2 \sin \phi^2}{\cos \phi^2} = P'^2, \\ \Phi''^2 \theta^2 + \Phi_1''^2 \cdot \frac{p^2 - \theta^2 \sin \phi^2}{\cos \phi^2} = P''^2; \end{cases}$$

oder

$$68. \begin{cases} (\Phi^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 \sin \phi^2) \theta^2 + \Phi_1^2 p^2 = P^2 \cos \phi^2, \\ (\Phi'^2 \cos \phi^2 - \Phi_1'^2 \sin \phi^2) \theta^2 + \Phi_1'^2 p^2 = P'^2 \cos \phi^2, \\ (\Phi''^2 \cos \phi^2 - \Phi_1''^2 \sin \phi^2) \theta^2 + \Phi_1''^2 p^2 = P''^2 \cos \phi^2; \end{cases}$$

oder, um nun auch θ zu eliminiren,

$$69. \begin{cases} \frac{\Phi^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 \sin \phi^2}{\Phi'^2 \cos \phi^2 - \Phi_1'^2 \sin \phi^2} = \frac{P^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 p^2}{P'^2 \cos \phi^2 - \Phi_1'^2 p^2}, \\ \frac{\Phi^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 \sin \phi^2}{\Phi''^2 \cos \phi^2 - \Phi_1''^2 \sin \phi^2} = \frac{P^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 p^2}{P''^2 \cos \phi^2 - \Phi_1''^2 p^2}; \end{cases}$$

oder

$$70. \begin{cases} \frac{(\Phi^2 + \Phi_1^2) \cos \phi^2 - \Phi_1^2}{(\Phi'^2 + \Phi_1'^2) \cos \phi^2 - \Phi_1'^2} = \frac{P^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 p^2}{P'^2 \cos \phi^2 - \Phi_1'^2 p^2}, \\ \frac{(\Phi^2 + \Phi_1^2) \cos \phi^2 - \Phi_1^2}{(\Phi''^2 + \Phi_1''^2) \cos \phi^2 - \Phi_1''^2} = \frac{P^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 p^2}{P''^2 \cos \phi^2 - \Phi_1''^2 p^2}. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\Phi^2 + \Phi_1^2 = (A \cos \phi - \sin \phi)^2 + (A \sin \phi + \cos \phi)^2 = 1 + A^2,$$

$$\Phi'^2 + \Phi_1'^2 = (A' \cos \phi - \sin \phi)^2 + (A' \sin \phi + \cos \phi)^2 = 1 + A'^2,$$

$$\Phi''^2 + \Phi_1''^2 = (A'' \cos \phi - \sin \phi)^2 + (A'' \sin \phi + \cos \phi)^2 = 1 + A''^2.$$

Also bleiben uns nun noch die beiden Gleichungen

$$71. \begin{cases} \frac{(1 + A^2) \cos \phi^2 - \Phi_1^2}{(1 + A'^2) \cos \phi^2 - \Phi_1'^2} = \frac{P^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 p^2}{P'^2 \cos \phi^2 - \Phi_1'^2 p^2}, \\ \frac{(1 + A^2) \cos \phi^2 - \Phi_1^2}{(1 + A''^2) \cos \phi^2 - \Phi_1''^2} = \frac{P^2 \cos \phi^2 - \Phi_1^2 p^2}{P''^2 \cos \phi^2 - \Phi_1''^2 p^2}; \end{cases}$$

die sich aber, weil

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_1^2}{\cos \phi^2} &= \left(\frac{\Phi_1}{\cos \phi} \right)^2 = (1 + A \tan \phi)^2, \\ \frac{\Phi_1'^2}{\cos \phi^2} &= \left(\frac{\Phi_1'}{\cos \phi} \right)^2 = (1 + A' \tan \phi)^2, \\ \frac{\Phi_1''^2}{\cos \phi^2} &= \left(\frac{\Phi_1''}{\cos \phi} \right)^2 = (1 + A'' \tan \phi)^2\end{aligned}$$

ist, auf die Form

$$72. \quad \begin{cases} \frac{1 + A^2 - (1 + A \tan \phi)^2}{1 + A'^2 - (1 + A' \tan \phi)^2} = \frac{P^2 - p^2 (1 + A \tan \phi)^2}{P'^2 - p^2 (1 + A' \tan \phi)^2}, \\ \frac{1 + A^2 - (1 + A \tan \phi)^2}{1 + A''^2 - (1 + A'' \tan \phi)^2} = \frac{P^2 - p^2 (1 + A \tan \phi)^2}{P''^2 - p^2 (1 + A'' \tan \phi)^2} \end{cases}$$

bringen lassen.

Durch weitere Entwicklung bringt man dieselben auf die Form

$$73. \quad \begin{cases} \tan \phi^2 + 2 \frac{AP'^2 - A'P^2 - p^2(A - A')(1 - AA')}{A^2 P'^2 - A'^2 P^2 - p^2(A^2 - A'^2)} \tan \phi - 1 = 0, \\ \tan \phi^2 + 2 \frac{AP''^2 - A''P^2 - p^2(A - A'')(1 - AA'')}{A^2 P''^2 - A''^2 P^2 - p^2(A^2 - A''^2)} \tan \phi - 1 = 0, \end{cases}$$

und erhält hieraus durch Elimination von $\tan \phi$ endlich die nun bloss noch q und p enthaltende Gleichung

$$74. \quad \frac{AP'^2 - A'P^2 - p^2(A - A')(1 - AA')}{A^2 P'^2 - A'^2 P^2 - p^2(A^2 - A'^2)} = \frac{AP''^2 - A''P^2 - p^2(A - A'')(1 - AA'')}{A^2 P''^2 - A''^2 P^2 - p^2(A^2 - A''^2)}.$$

Nach gehöriger Entwicklung wird diese Gleichung

$$75. \quad \frac{\begin{cases} AA'(A - A')(p^2 - q^2) - 2(AB' - A'B)p \\ - 2AA'(B - B')q + AB'^2 - A'B^2 \end{cases}}{\begin{cases} 2AA'(AB' - A'B)q - 2AA'(A - A')pq \\ - 2(A^2 B' - A'^2 B)p + A^2 B'^2 - A'^2 B^2 \end{cases}} = \frac{\begin{cases} AA''(A - A'')(p^2 - q^2) - 2(AB'' - A''B)p \\ - 2AA''(B - B'')q + AB''^2 - A''B^2 \end{cases}}{\begin{cases} 2AA''(AB'' - A''B)q - 2AA''(A - A'')pq \\ - 2(A^2 B'' - A''^2 B)p + A^2 B''^2 - A''^2 B^2 \end{cases}},$$

vereinfacht sich aber sehr, wenn man, wie wir von jetzt an thun wollen, den Durchschnittspunkt der Linie AB mit der Abscissenaxe $A''B''$ als Anfang der Abscissen annimmt, indem dadurch $B = 0$ wird, und daher unsere obige Gleichung in die folgende viel einfachere übergeht:

$$76. \frac{A'(A - A')(p^2 - q^2) - 2B'p + 2A'B'q + B'^2}{2AA'B'q - 2A'(A - A')pq - 2AB'p + AB'^2} \\ = \frac{A''(A - A'')(p^2 - q^2) - 2B''p + 2A''B''q + B''^2}{2AA''B''q - 2A''(A - A'')pq - 2AB''p + AB''^2}.$$

Multipliziert man über Kreuz; so ergibt sich mittelst einer Rechnung, die keine andere Schwierigkeit als die einiger Weitläufigkeit hat:

$$77. AA'B''(A - A')\{2(A''q - p) + B''\}(p^2 - q^2) \\ - 2A'B'(A - A'')\{2(A'q - p) + B'\}pq \\ = AA''B'(A - A'')\{2(A'q - p) + B'\}(p^2 - q^2) \\ - 2A'B''(A - A')\{2(A''q - p) + B''\}pq$$

oder

$$78. 0 = A'B''(A - A')\{2(A''q - p) + B''\}\{A(p^2 - q^2) + 2pq\} \\ - A'B'(A - A'')\{2(A'q - p) + B'\}\{A(p^2 - q^2) + 2pq\},$$

oder

$$79. 0 = A'B''(A - A')\{2(A''q - p) + B''\} \\ - A'B'(A - A'')\{2(A'q - p) + B'\},$$

oder

$$80. \frac{2(A'q - p) + B'}{2(A''q - p) + B''} = \frac{A'B''(A - A')}{A'B'(A - A'')},$$

oder

$$81. \frac{2(A'q - p) + B'}{A'B''(A - A')} = \frac{2(A''q - p) + B''}{A'B'(A - A'')},$$

oder auch

$$82. 0 = 2\{(A - A')A'B'' - (A - A'')A'B'\}p \\ - 2A'A''\{(A - A')B'' - (A - A'')B'\}q \\ - \{(A - A')A'B''^2 - (A - A'')A'B'^2\}.$$

Hieraus ergibt sich das merkwürdige Resultat, dass der geometrische Ort der Mittelpunkte aller vier gegebenen gerade Linien berührenden Ellipsen eine durch die obige Gleichung bestimmte gerade Linie ist.

Bezeichnet man nun die Coordinaten der drei Spitzen C' , C'' , C''' (Fig. 6.) des von den vier gegebenen geraden Linien AB , $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ gebildeten Vierecks $CC'C''C'''$ in Bezug auf $A'''B'''$ als Axe und C als Anfang der Abscissen respective durch x' , y' ; x'' , y'' ; x''' , y''' ; so hat man zur Bestimmung dieser Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$y' = Ax', \quad y' = A'x' + B'; \\ y'' = A''x'' + B', \quad y'' = A'''x'' + B''; \\ y''' = A'''x''' + B'', \quad y''' = 0;$$

und erhält aus denselben sehr leicht:

$$x' = \frac{B'}{A - A'}, \quad y' = \frac{AB'}{A - A'};$$

$$x'' = - \frac{B' - B''}{A' - A''}, \quad y'' = \frac{A'B'' - A''B'}{A' - A''};$$

$$x''' = - \frac{B''}{A''}, \quad y''' = 0.$$

Folglich sind, wenn man die Diagonale CC'' des Vierecks $CC'C''C'''$ zieht und dieselbe in P halbt, nach bekannten Principien der analytischen Geometrie die Coordinaten von P :

$$- \frac{B' - B''}{2(A' - A'')}, \quad \frac{A'B'' - A''B'}{2(A' - A'')};$$

und eben so würden, wenn man die Diagonale $C'C'''$ zöge und dieselbe in Q halbirte, die Coordinaten von Q

$$\frac{A''B' - (A - A')B''}{2(A - A')A''}, \quad \frac{AB'}{2(A - A')}$$

seyn.

Die Gleichung der durch den Anfang der Coordinaten und den Punkt C'' gehenden Diagonale CC'' ist:

$$83. \quad y = - \frac{A'B'' - A''B'}{B' - B''} x.$$

Bezeichnet man nun die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Diagonale mit dem geometrischen Orte der Mittelpunkte aller die vier gegebenen geraden Linien berührenden Ellipsen durch u, v ; so hat man zur Bestimmung von u und v nach 80. und 83. die beiden Gleichungen

$$v = - \frac{A'B'' - A''B'}{B' - B''} u,$$

$$\frac{2(A'u - v) + B'}{2(A''u - v) + B''} = \frac{A'B''(A - A')}{A''B'(A - A')}.$$

Bestimmt man aber aus diesen beiden Gleichungen u und v wirklich; so erhält man

$$u = - \frac{B' - B''}{2(A' - A'')}, \quad v = \frac{A'B'' - A''B'}{2(A' - A'')},$$

und sieht also, dass u und v mit den oben gefundenen Coordinaten des Punktes P völlig einerlei sind, so dass also die Diagonale CC'' von dem geometrischen Orte der Mittelpunkte aller die vier gegebenen geraden Linien berührenden Ellipsen in ihrem Mittelpunkt geschnitten wird.

Dasselbe, was so eben von der Diagonale CC'' bewiesen worden ist, gilt natürlich auch von der Diagonale $C'C'''$, weil man eben so wie vorher C als Anfang und $A''B'''$ als Axe der Abscissen angenommen worden ist, sich auch C''' als Anfang und wieder $A''B'''$ als Axe der Abscissen angenommen denken kann.

Dies führt nun unmittelbar zu dem folgenden merkwürdigen Theoreme:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller die vier gegebenen geraden Linien $AB, A'B', A''B'', A'''B'''$ berührenden Ellipsen ist die gerade Linie, welche die Mittelpunkte P und Q der beiden Diagonalen $CC'', C'C'''$ des von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten Vierecks $CC'C''C'''$ mit einander verbindet.

Betrachtet man das von den vier geraden Linien $AB, A'B', A''B'', A'''B'''$ gebildete vollständige Viereck $CC''C'''C''''C''''C''$; so ist, weil man sich offenbar auch C'' als Anfang und $A'''B'''$ als Axe der Abscissen angenommen denken kann, klar, dass auch die Diagonale $C''C''$ des in Rede stehenden vollständigen Vierecks von dem geometrischen Orte der Mittelpunkte aller die vier gegebenen geraden Linien berührenden Ellipsen halbtirt werden muss, woraus sich der folgende Satz ergibt:

Die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks liegen jederzeit in einer und derselben geraden Linie, und diese gerade Linie ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller die vier geraden Linien, von denen das vollständige Viereck gebildet wird, berührenden Ellipsen.

Bevor wir weiter gehen, schicken wir die folgende nicht unmittelbar hierher gehörende geometrische Betrachtung voraus.

A und A' seyen zwei beliebige Punkte, deren Coordinaten in Bezug auf zwei beliebige rechtwinklige Axen x, y und x', y' seyn mögen. Legen wir nun durch A zwei mit den primitiven parallele Axen und bezeichnen den von der Linie AA' mit dem positiven Theile der secundären Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der secundären Abscissenaxe an nach dem positiven Theile der secundären Ordinatenaxe hin von 0 bis 360° zählt, durch η ; so sind offenbar

$$AA' \cdot \cos \eta \text{ und } AA' \cdot \sin \eta$$

die secundären Coordinaten des Punktes A' , und es ist folglich nach den allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung

$$x' = x + AA' \cdot \cos \eta, \quad y' = y + AA' \cdot \sin \eta.$$

Betrachten wir nun aber die unbegrenzte gerade Linie, von welcher AA' ein Theil ist, selbst als eine Abscissenaxe, A als den Anfang der Abscissen, nehmen denjenigen der beiden von dem Punkte A gebildeten Theile dieser Linie, welcher auf der positiven Seite der Axe liegt, welche wir vorher die secundäre Abscissenaxe genannt haben, als den positiven Theil an, und bezeichnen den von diesem positiven Theile mit dem positiven Theile der secundären Abscissenaxe eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch ε , die Abscisse des Punktes A' in Bezug auf die Linie, von welcher AA' ein Theil ist, als Axe und den Punkt A als Anfang der Abscissen, aber durch e ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$AA' \cdot \cos \eta = e \cos \varepsilon, \quad AA' \cdot \sin \eta = e \sin \varepsilon,$$

und nach dem Obigen folglich

$$x' = x + e \cos \varepsilon, \quad y' = y + e \sin \varepsilon.$$

Nehmen wir aber in der Linie, von welcher AA' ein Theil ist, irgend einen andern Punkt als A als Anfang der Abscissen an, und bezeichnen die Abscissen der Punkte A und A' in Bezug auf diesen Punkt durch L und L' ; so ist nach den allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung

$$L' = L + e$$

oder

$$e = L' - L,$$

und folglich nach dem Obigen

$$84. \quad \begin{cases} x' = x + (L' - L) \cos \varepsilon, & y' = y + (L' - L) \sin \varepsilon; \\ x' - x = (L' - L) \cos \varepsilon, & y' - y = (L' - L) \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun die drei Seiten $C'''C''', CC''', CC''$ des Dreiecks $CC'''C''$ (Fig. 6.) respective durch a, a', a'' , und die auf denselben senkrechten Höhen des in Rede stehenden Dreiecks durch h, h', h'' ; so sind, wenn man nach der Reihe die Linien $A'B'',$

$AB, A''B''$ als Abscissenaxen annimmt, die Ordinaten der Punkte P, Q, R respective $\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h', \frac{1}{2}h''$, wenn man die positiven Seiten der Abscissenaxen $A''B'', AB, A''B''$ von diesen Linien an nach dem innern Raume des Dreiecks $CC''C'''$ hin nimmt. In der durch die drei Punkte P, Q, R gehenden geraden Linie nehme man jetzt einen beliebigen Punkt als Anfang der Abscissen und ausserdem noch einen andern beliebigen Punkt, den wir durch X bezeichnen wollen, an, und bezeichne die Abscissen der vier Punkte P, Q, R, X in Bezug auf den angenommenen Anfang der Abscissen respective durch n, n', n'', x , die Winkel, unter welchen die durch P, Q, R gehende gerade Linie gegen die Linien $A''B'', AB, A''B''$, d. i. gegen die Seiten $C''C''', CC''', CC''$ des Dreiecks $CC''C'''$ geneigt ist, aber durch $\alpha, \alpha', \alpha''$; so ist, wenn nun noch die Ordinaten des Punktes X in Bezug auf die Abscissenaxen $A''B'', AB, A''B''$ respective durch p, p', p'' bezeichnet werden, nach 84.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}h - p &= \{ -n - (-x) \} \sin \alpha, \\ \frac{1}{2}h' - p' &= (n' - x) \sin \beta, \\ \frac{1}{2}h'' - p'' &= (n'' - x) \sin \gamma;\end{aligned}$$

oder

$$85. \quad \begin{cases} \frac{1}{2}h - p = (x - n) \sin \alpha, \\ \frac{1}{2}h' - p' = (n' - x) \sin \beta, \\ \frac{1}{2}h'' - p'' = (n'' - x) \sin \gamma; \end{cases}$$

wobei wir bemerken, dass wir die positive Richtung der durch die drei Punkte P, Q, R bestimmten geraden Linie uns von P nach Q und R hin gehend gedacht haben.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt der aus dem Punkte X als Mittelpunkt beschriebenen, die vier gegebenen geraden Linien berührenden Ellipse durch E , den Flächeninhalt des Dreiecks $CC''C'''$ durch Δ ; so ist, weil diese Ellipse die drei dieses Dreieck bildenden geraden Linien berührt, nach 39.

$$E = \pi \sqrt{\frac{aa'a'' (\frac{1}{2}h - p) (\frac{1}{2}h' - p') (\frac{1}{2}h'' - p'')}{\Delta}},$$

und folglich nach 85.

$$86. \quad E = \pi \sqrt{\frac{aa'a'' (x - n) (x - n') (x - n'') \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\Delta}}.$$

Dieser Ausdruck ist nur dann eine reelle Grösse, wenn das Product

$$(x - n) (x - n') (x - n'')$$

positiv ist. Der Punkt X kann aber in der durch P, Q, R gehenden geraden Linie entweder unterhalb P , oder zwischen P und Q , oder zwischen Q und R , oder oberhalb R liegen, und in diesen vier Fällen ist, wenn wir, was offenbar immer verstattet ist, den Anfang der Abscissen in der durch P, Q, R gehenden Linie uns so angenommen denken, dass n, n', n'', x sämmtlich positiv sind, respective

$$x - n < 0, \quad x - n' < 0, \quad x - n'' < 0;$$

$$x - n > 0, \quad x - n' < 0, \quad x - n'' < 0;$$

$$x - n > 0, \quad x - n' > 0, \quad x - n'' < 0;$$

$$x - n > 0, \quad x - n' > 0, \quad x - n'' > 0.$$

Hieraus sieht man, dass das Product

$$(x - n) (x - n') (x - n'')$$

bloss im zweiten und vierten Falle positiv ist, und dass sich also auch bloss aus zwischen P und Q und oberhalb R liegenden Punkten als Mittelpunkten Ellipsen beschreiben lassen, welche die vier gegebenen Linien berühren. In den Punkten P, Q, R wird $E=0$, und man sieht leicht, dass für diese Punkte die Ellipse, welche die vier gegebenen geraden Linien berührt, respective in die drei Diagonalen $CC'', C'C''', C''C'''$ des von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vollständigen Vierecks übergeht.

IV. Nach diesen allgemeinen Discussionen hat nun die Bestimmung der grössten vier gerade Linien berührenden Ellipse keine Schwierigkeit mehr. Da in der Formel 86. $\pi, a, a', a'', \alpha, \beta, \gamma, \Delta$ constante Grössen sind; so wird E mit dem Producte

$$\mu = (x - n) (x - n') (x - n'')$$

zugleich ein Maximum. Durch Differentiation dieses Productes ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dx} &= (x - n) (x - n') + (x - n) (x - n'') + (x - n') (x - n'') \\ &= 3x^2 - 2(n + n' + n'') x + nn' + nn'' + n'n'', \end{aligned}$$

und wir haben folglich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$3x^2 - 2(n + n' + n'') x + nn' + nn'' + n'n'' = 0,$$

aus der man ohne Schwierigkeit

$$x = \frac{n + n' + n'' \pm \sqrt{n^2 + n'^2 + n''^2 - nn' - nn'' - n'n''}}{3}$$

erhält. Für den zweiten Differentialquotienten ergibt sich

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = 2 \{ 3x - (n + n' + n'') \},$$

und folglich für den gefundenen Werth von x

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = \pm 2 \sqrt{n^2 + n'^2 + n''^2 - nn' - nn'' - n'n''}.$$

Da für den Fall des Maximums der zweite Differentialquotient negativ seyn muss; so muss man das untere Zeichen nehmen, d. i. man muss

$$87. \quad x = \frac{n + n' + n'' - \sqrt{n^2 + n'^2 + n''^2 - nn' - nn'' - n'n''}}{3}$$

setzen. Nimmt man, was offenbar verstatet ist, den Punkt P selbst als Anfang der Abscissen an; so ist $n = 0$, und folglich

$$88. \quad x = \frac{n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3}.$$

Nun fragt sich jetzt, ob sich aus dem durch diese Abscisse bestimmten Punkte als Mittelpunkt auch wirklich eine die vier gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschreiben lässt.

Zuerst bemerken wir zum Ueberfluss, dass

$$\sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}$$

immer eine reelle Grösse ist. Da nämlich

$$(n' - n'')^2 = n'^2 + n''^2 - 2n'n''$$

ist; so ist

$n'^2 + n''^2 - 2n'n'' > 0$,
und folglich, da n' und n'' im vorliegenden Falle offenbar positiv sind, weil P der Anfang der Abscissen ist, um so mehr

$$n'^2 + n''^2 - n'n'' > 0,$$

also

$$\sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}$$

eine reelle Grösse.

Ferner lässt sich leicht zeigen, dass immer

$$n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''} > 0$$

ist. Wäre dies nämlich der Fall; so wäre

$$\begin{aligned} n' + n'' &> \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}, \\ (n' + n'')^2 &> n'^2 + n''^2 - n'n'', \\ n'^2 + n''^2 + 2n'n'' &> n'^2 + n''^2 - n'n'', \\ n'n'' &> 0. \end{aligned}$$

Da nun Letzteres immer der Fall ist, da n' und n'' positiv sind; so ist natürlich auch Ersteres immer der Fall, d. h. es ist immer

$$n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''} > 0.$$

Endlich lässt sich zeigen, dass immer

$$\frac{n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3} < n'$$

ist. Wäre nämlich

$$\frac{n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3} > n';$$

so wäre

$$\begin{aligned} n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''} &> 3n', \\ n' + n'' &> 3n' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}, \\ n'' - 2n' &> \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}, \\ n''^2 + 4n'^2 - 4n'n'' &> n'^2 + n''^2 - n'n'', \\ 3n'(n' - n'') &> 0, \\ n' - n'' &> 0, \quad n' > n'', \end{aligned}$$

welches ungereimt ist, da im Gegentheil immer $n'' > n'$ ist. Also ist in der That immer

$$\frac{n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3} < n',$$

wie behauptet wurde.

Hieraus sieht man nun, dass der durch die Abscisse

$$x = \frac{n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3}$$

bestimmte Punkt auf der durch P , Q , R gehenden geraden Linie immer zwischen P und Q liegt, und dass sich folglich aus diesem Punkte als Mittelpunkt nach dem Obigen immer eine die vier gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschreiben lässt.

Bemerkt kann noch werden, dass der Mittelpunkt dieser Ellipse immer sehr leicht construirt werden kann. Beschreibt man nämlich über PQ ein gleichseitiges Dreieck, dessen Spitze wir S nennen wollen, und zieht RS ; so ist, wie leicht erhellen wird,

$$RS^2 = (n'' - \frac{1}{2}n')^2 + n'^2 - \frac{1}{4}n'^2,$$

d. i.

$$RS = \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''},$$

und da sich also die Quadratwurzel auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf diese Weise sehr leicht construiren lässt; so lässt sich natürlich, wie nun Jeder von selbst finden wird, auch

$$x = \frac{n' + n'' - \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3}$$

sehr leicht construiren.

Hat man so den Mittelpunkt der grössten Ellipse gefunden; so hat die übrige Bestimmung dieser Ellipse keine Schwierigkeit mehr, da es nun bloss darauf ankommt, aus dem gegebenen Mittelpunkte eine die drei Linien AB , $A'B''$, $A''B'''$, oder auch eine die drei Linien AB , AB' , $A''B'''$ berührende Ellipse zu beschreiben, eine Aufgabe, die im Obigen mit aller nöthigen Ausführlichkeit aufgelöst worden ist.

Noch könnte man fragen, ob es unter den die vier gegebenen Linien berührenden Ellipsen, die sich aus den oberhalb R liegenden Punkten der durch P , Q , R gehenden geraden Linien beschreiben lassen, nicht vielleicht eine grösste Ellipse gebe. Aus der Formel 86. erhellt aber leicht, dass diese Ellipsen mit x fortwährend und in's Unendliche wachsen.

Endlich lässt sich noch fragen, ob dem Werthe

$$x = \frac{n + n' + n'' + \sqrt{n^2 + n'^2 + n''^2 - nn' - nn'' - n'n''}}{3},$$

da für denselben der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = 2 \sqrt{n^2 + n'^2 + n''^2 - nn' - nn'' - n'n''},$$

d. i. positiv ist, nicht vielleicht ein Minimum entspricht. Um diese Frage zu beantworten, setze man der Kürze wegen, wie verstattet ist, n wieder $= 0$, und folglich

$$x = \frac{n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3}.$$

Zuerst lässt sich nun zeigen, dass

$$\frac{n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3} > n'$$

ist. Wäre nämlich

$$\frac{n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3} < n';$$

so wäre

$$n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''} < 3n',$$

$$\sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''} < 2n' - n'',$$

$$n'^2 + n''^2 - n'n'' < 4n'^2 + n''^2 - 4n'n'',$$

$$0 < 3n' (n' - n'') , \\ 0 < n' - n'' , \quad n'' < n' ,$$

da doch vielmehr $n'' > n'$ ist. Also ist

$$\frac{n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3} > n' ,$$

wie behauptet wurde.
Ferner ist immer

$$\frac{n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3} < n'' .$$

Wäre dies nämlich der Fall; so wäre

$$\begin{aligned} n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''} &< 3n'' , \\ \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''} &< 2n'' - n' , \\ n'^2 + n''^2 - n'n'' &< 4n''^2 + n'^2 - 4n'n'' , \\ 0 &< 3n'' (n'' - n') , \\ 0 &< n'' - n' , \quad n'' > n' . \end{aligned}$$

Da nun Letzteres immer der Fall ist, so ist offenbar auch Ersteres immer der Fall, d. i. es ist immer

$$\frac{n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3} < n'' .$$

Für

$$x = \frac{n' + n'' + \sqrt{n'^2 + n''^2 - n'n''}}{3}$$

ist folglich immer

$$x > n' , \quad x < n'' ,$$

und der Abscisse x entspricht also ein Punkt in der durch P, Q, R gehenden Linie, aus welchem als Mittelpunkt sich nach dem Obigen keine die vier gegebenen geraden Linien berührende Ellipse beschreiben lässt, so dass also an ein Minimum nicht zu denken ist.

VI.

Über Theorie und Gebrauch der Libelle.

1.

Der Zweck dieses kleinen Aufsatzes ist eine möglichst deutliche Darstellung der Theorie, und eine möglichst deutliche Erläuterung des Gebrauchs der Libelle, so wie ich sie noch in keiner der mir bekannten Schriften über diesen Gegenstand gefunden habe. Die grosse Wichtigkeit des Instruments, welches dieser Aufsatz betrifft, für alle geodätische und astronomische Messungen wird die Aufnahme desselben in diese Sammlung rechtfertigen. Die jetzt gewöhnliche Einrichtung der Libellen setze ich als bekannt voraus.

Der Neigungswinkel einer geraden Linie gegen den Horizont, welcher immer ein spitzer Winkel ist, soll jederzeit als positiv oder als negativ betrachtet werden, je nachdem der auf der rechten Seite des Beobachters liegende Endpunkt der in Rede stehenden geraden Linie höher oder tiefer liegt, wie der auf der linken Seite des Beobachters befindliche Endpunkt dieser Linie.

Die Maasseinheit für die Winkel soll im Folgenden immer ein Intervall der Libelle seyn. Die Methoden, mittelst welcher man den Werth eines Intervalls der Libelle in Secunden finden kann, indem man z. B. die Libelle auf die Alhidade eines Kreises bindet, und letztere so weit dreht, bis die Luftblase um ein Intervall der Libelle fortgerückt ist, wo dann der Nonius des Kreises unmittelbar den Werth eines Intervalls der Libelle in Secunden angiebt, setze ich als bekannt voraus.

Die Intervalle rechts vom Nullpunkte der Libelle sollen als positiv; die Intervalle links vom Nullpunkte der Libelle dagegen als negativ betrachtet werden.

2.

In Fig. 7. sey der um C als Mittelpunkt beschriebene Kreis der Kreis, von welchem die Libelle ein Bogen ist. O sey der Nullpunkt der Libelle, die Luftblase sey LR , und M sey der Mittelpunkt der Luftblase.

Denkt man sich nun durch M eine Berührende an den um C beschriebenen Kreis gezogen; so wird diese Berührende horizontal, und die Neigung der durch O an den um C beschriebenen Kreis gezogenen Berührenden gegen die erstere Berührende die Neigung der Libelle gegen den Horizont seyn.

In Bezug auf die Lage der Luftblase und ihres Mittelpunkts gegen den Nullpunkt der Libelle können offenbar bloss die vier verschiedenen, in Fig. 7. dargestellten Fälle vorkommen, welche wir nun nach der Reihe einzeln durchgehen wollen, indem wir immer die Neigung der Libelle gegen den Horizont durch N , die an den beiden Endpunkten der Luftblase rechts und links gemachten Ablesungen respective durch ρ und λ bezeichnen werden.

Im ersten Falle (Fig. 7. a.) ist, wenn wir den Winkel BFE durch α bezeichnen,

$$N = \alpha.$$

Zieht man aber CO und CM ; so ist, weil im Vierecke $COFM$ bei O und M rechte Winkel sind, der Winkel α offenbar dem Winkel OCM gleich, und wird also, so wie dieser Winkel, von dem Bogen OM gemessen. Also ist auch

$$N = C = OM.$$

Weil nun aber

$$OM = OL + LM = OL + \frac{OR - OL}{2} = \frac{OL + OR}{2},$$

und im vorliegenden Falle offenbar

$$\lambda = + OL, \quad \rho = + OR,$$

also

$$OL = \lambda, \quad OR = \rho$$

ist; so ist

$$N = \frac{\lambda + \rho}{2}.$$

Im zweiten Falle (Fig. 7. b.) ist, wenn wir wieder den Winkel BFE durch α bezeichnen,

$$N = \alpha.$$

Der Winkel α ist wie vorher dem Winkel OCM gleich, und dieser Winkel wird von dem Bogen OM gemessen. Also ist wieder

$$N = C = OM.$$

Nun ist aber

$$OM = LM - OL = \frac{OL + OR}{2} - OL = \frac{-OL + OR}{2},$$

und im vorliegenden Falle offenbar

$$\lambda = - OL, \quad \rho = + OR;$$

also

$$OL = - \lambda, \quad OR = \rho.$$

Folglich ist auch in diesem Falle

$$N = \frac{\lambda + \rho}{2}.$$

Im dritten Falle (Fig. 7. c.) ist, wenn wir den Winkel AFE durch β bezeichnen,

$$N = - \beta.$$

Der Winkel β ist dem Winkel OCM gleich, und dieser Winkel wird von OM gemessen. Also ist

$$N = - C = - OM.$$

Nun ist aber

$$- OM = LM - OL = \frac{OL + OR}{2} - OL = \frac{-OL + OR}{2},$$

und im vorliegenden Falle offenbar

$$\lambda = - OL, \quad \rho = + OR;$$

also

$$OL = - \lambda, \quad OR = \rho.$$

Folglich ist auch in diesem Falle

$$N = \frac{\lambda + \rho}{2}.$$

Im vierten Falle (Fig. 7. d.) ist endlich, wenn wir den Winkel AFE wieder durch β bezeichnen, wie vorher

$$N = -\beta.$$

Der Winkel β ist dem Winkel OCM gleich, und dieser Winkel wird von OM gemessen. Also ist

$$N = -C = -OM.$$

Nun ist aber

$$-OM = LM - OL = \frac{OL - OR}{2} - OL = \frac{-OL - OR}{2},$$

und im vorliegenden Falle offenbar

$$\lambda = -OL, \quad \rho = -OR;$$

also

$$OL = -\lambda, \quad OR = -\rho.$$

Folglich ist wieder

$$N = \frac{\lambda + \rho}{2}.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich also, dass die Neigung der Libelle immer und in völliger Allgemeinheit mittelst der Formel

$$N = \frac{\lambda + \rho}{2}$$

gefunden wird.

3.

Ist die Libelle so eingerichtet, wie an allen neuern Instrumenten, dass dieselbe nämlich zwei abgesonderte Theilungen trägt, deren jede auch von einem besondern Nullpunkte angerechnet wird, wobei angenommen wird, dass die Linie, welche mittelst der Libelle in die horizontale Lage gebracht werden soll, und die Libelle selbst in jedem Falle so genau horizontal sind, dass die Endpunkte der Luftblase auf beiden Seiten bis zu beiden Theilungen reichen; so bezeichne man den Abstand der beiden Nullpunkte, in Intervallen der Theilung der Libelle ausgedrückt, durch $2e$, das Resultat der Ablesung rechts durch r , das Resultat der Ablesung links durch l , und nehme r und l immer positiv.

Behalten nun λ und ρ dieselbe Bedeutung wie in 2.; so ist, wenn die Libelle auf die in Rede stehende Weise eingerichtet ist, offenbar immer

$$\lambda = -(e + l), \quad \rho = e + r,$$

und folglich jederzeit

$$\lambda + \rho = -(e + l) + (e + r) = r - l.$$

Weil nun nach 2. in allen Fällen

$$N = \frac{\lambda + \rho}{2}$$

ist; so ist bei der in Rede stehenden Einrichtung der Libelle immer

$$N = \frac{r - l}{2},$$

d. h. man erhält die Neigung der Libelle jederzeit, wenn man von der Ablesung rechts die Ablesung links subtrahirt, indem man beide Ablesungen als positiv betrachtet, und dann die Differenz durch Zwei dividirt.

4.

Wir wollen uns nun eine gerade Linie denken, die unter einem kleinen Winkel gegen den Horizont geneigt ist, und wollen den auf der rechten Seite des Beobachters liegenden Endpunkt dieser Linie R , den auf der linken Seite des Beobachters liegenden Endpunkt derselben L nennen, ihre Neigung gegen den Horizont aber, wobei 1. zu vergleichen ist, durch n bezeichnen.

Durch den Endpunkt L der Linie LR denken wir uns ferner mit der auf diese Linie gesetzten Libelle eine Parallellinie gezogen, und bezeichnen den von derselben mit der Linie LR eingeschlossenen spitzen Winkel, indem wir diesen Winkel als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem die in Rede stehende Parallellinie unter- oder oberhalb der Linie LR liegt, durch ϕ .

Die Neigung der Libelle oder, was dasselbe ist, der mit ihr durch den Punkt L gezogenen Parallele gegen den Horizont wird wie oben durch N bezeichnet.

Ist nun zuerst n positiv und folglich L der am tiefsten liegende Endpunkt der Linie LR ; so kann, wenn in Fig. 8. der Horizont durch die Linie LA dargestellt wird, und LB die durch L mit der Libelle parallel gezogene Linie ist, diese Linie offenbar bloss die drei verschiedenen, in der in Rede stehenden Figur dargestellten Lagen haben. Im ersten Falle (Fig. 8. a.) sind N und ϕ positiv, und es ist offenbar

$$N + \phi = n.$$

Im zweiten Falle (Fig. 8. b.) ist N positiv, ϕ negativ, also $-\phi$ positiv, und es ist offenbar $(-\phi) + n = N$, d. i. wieder

$$N + \phi = n.$$

Im dritten Falle (Fig. 8. c.) ist N negativ, $-N$ positiv, ϕ positiv, und es ist offenbar $(-N) + n = \phi$, d. i. wieder

$$N + \phi = n,$$

so dass also in allen drei Fällen

$$N + \phi = n$$

ist.

Ist ferner n negativ und folglich L der am höchsten liegende Endpunkt der Linie LR ; so kann, wenn in Fig. 9. der Horizont wieder durch LA dargestellt wird, und LB die durch L mit der Libelle parallel gezogene Linie ist, diese Linie offenbar bloss die drei verschiedenen, in der in Rede stehenden Figur dargestellten Lagen haben. Im ersten Falle (Fig. 9. a.) ist N positiv, ϕ negativ, $-\phi$ positiv, und es ist offenbar $N + (-\phi) = -n$, d. i.

$$N + \phi = n.$$

Im zweiten Falle (Fig. 9. b.) ist N negativ, $-N$ positiv, ϕ negativ, $-\phi$ positiv, und es ist offenbar $(-N) + (-\phi) = -n$, d. i. wieder

$$N + \phi = n.$$

Im dritten Falle (Fig. 9. c.) ist N negativ, $-N$ positiv, ϕ positiv, und es ist offenbar $(-N) - \phi = -n$, d. i. wieder

$$N + \phi = n,$$

so dass also auch jetzt in allen drei Fällen

$$N + \phi = n$$

ist.

Hieraus sieht man jetzt, dass die Gleichung

$$N + \phi = n$$

völlig allgemein ist.

5.

Stellt man nun, wie Fig. 10. zeigt, das Niveau *NI* zwei Mal, indem man seine Endpunkte umkehrt, auf der Linie *LR*, deren Neigung gegen den Horizont wie vorher *n* seyn soll, auf, und bezeichnet die Neigungen des Niveaus oder der Libelle in beiden Lagen durch *N* und *N'*, die beiden Lagen entsprechenden Werthe des vorher durch ϕ bezeichneten Winkels aber durch ϕ und ϕ' ; so hat man nach 4. die beiden Gleichungen

$$N + \phi = n, \quad N' + \phi' = n,$$

zu denen noch die aus einer blossen Ansicht von Fig. 10. sich sogleich ergebende Gleichung

$$\phi + \phi' = 0$$

kommt. Diese drei Gleichungen sind hinreichend, um die drei Grössen *n*, ϕ , ϕ' durch *N* und *N'* auszudrücken. Weil nämlich vermöge der dritten Gleichung $\phi' = -\phi$ ist; so hat man die beiden Gleichungen

$$N + \phi = n, \quad N' - \phi = n$$

oder

$$N = n - \phi, \quad N' = n + \phi,$$

durch deren Addition und Subtraction auf der Stelle

$$n = \frac{N+N'}{2}, \quad \phi = \frac{N'-N}{2}, \quad \phi' = \frac{N-N'}{2}$$

erhalten wird.

6.

Hat man nun das Niveau in seinen beiden Lagen abgelesen, und sind λ , ρ und λ' , ρ' die Ablesungen in der ersten und zweiten Lage; so ist nach 2.

$$N = \frac{\lambda + \rho}{2}, \quad N' = \frac{\lambda' + \rho'}{2},$$

und folglich nach 5.

$$n = \frac{\lambda + \lambda' + \rho + \rho'}{4},$$

$$\phi = \frac{(\lambda' - \lambda) + (\rho' - \rho)}{4},$$

$$\phi' = \frac{(\lambda - \lambda') + (\rho - \rho')}{4}.$$

Hat das Niveau die Einrichtung, von welcher in 3. die Rede gewesen ist; so wollen wir die Ablesungen in beiden Lagen desselben jetzt durch *l*, *r* und *l'*, *r'* bezeichnen. Dann ist nach 3.

$$N = \frac{r - l}{2}, \quad N' = \frac{r' - l'}{2},$$

und folglich nach 5.

$$n = \frac{(r + r') - (l + l')}{4},$$

$$\phi = \frac{(l + r') - (r + l')}{4},$$

$$\phi' = \frac{(r + l) - (l' + r')}{4}.$$

Aus diesen Formeln lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen, von denen wir nur auf folgende aufmerksam machen, indem wir uns an das letzte der beiden obigen Systeme halten.

7.

Aus der Formel

$$n = \frac{(r+r') - (l+l')}{4}$$

erhellet, dass man mit jedem unberichtigten Niveau die Neigung einer Linie, z. B. der Drehungsaxe des Fernrohrs eines Passagen-Instruments auf das Genaueste bestimmen kann, wenn man nur das Niveau umkehrt und in beiden Lagen genau ablies't.

Nach 5. ist

$$N' - n = \phi,$$

und folglich nach 6.

$$N' - n = \frac{(l+r') - (r+l)}{4}.$$

Schraubt man nun, nachdem man das Niveau umgekehrt und abgelesen hat, die Drehungsaxe des Fernrohrs des Passagen-Instruments, um uns jetzt immer dieses Beispiels zu bedienen, so lange, bis die Angaben des Niveaus rechts und links respective $\frac{1}{2}(l+r')$ und $\frac{1}{2}(r+l)$ sind; so ist, wenn nun N'' die Neigung der Libelle, n' die Neigung der Axe bezeichnet, nach 3.

$$N'' = \frac{(l+r') - (r+l)}{4},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$N' - n = N''.$$

Nun liegt es aber, wie sogleich erhellet, in der Natur des angewandten Verfahrens, dass, wenn wir

$$n' = n + \Delta,$$

wo Δ positiv und negativ seyn kann, setzen, auch

$$N'' = N' + \Delta,$$

und folglich

$$n' - n = N'' - N'$$

oder

$$N' - n = N'' - n'$$

seyn wird. Weil aber nach dem Obigen

$$N' - n = N''$$

war; so ist

$$N'' = N'' - n',$$

d. i. $n' = 0$, und folglich die Axe des Passagen-Instruments horizontal, so dass dieselbe also durch das angegebene Verfahren jederzeit genau nivellirt werden kann.

Bringt man, nachdem auf diese Weise die Axe nivellirt worden, mittelst der Correctionsschraube der Libelle die Luftblase genau in die Mitte; so wird nun die Libelle offenbar genau rectificirt seyn.

Der Winkel ϕ oder ϕ' ist, wie aus dem Obigen hervorgeht, der Neigungswinkel der Libelle und der Axe gegen einander, wenn die Libelle auf der Axe steht, und dieser Winkel lässt sich also nach dem Obigen auch immer mit der Libelle selbst leicht

bestimmen, und mittelst des Zeichens von ϕ oder ϕ' kann auch immer die Art der Lage der Libelle gegen die Axe beurtheilt werden.

8.

Den Winkel, unter welchem die geraden Linien, welche die beiden höchsten und die beiden niedrigsten Endpunkte der beiden Zapfen der Axe des Passagen-Instruments mit einander verbinden, gegen einander geneigt sind, wollen wir die *Ungleichheit* der Zapfen nennen, weil die Zapfen sich offenbar der Gleichheit desto mehr nähern, je kleiner dieser Winkel ist, und nur dann, wenn dieser Winkel völlig verschwindet, genau einander gleich sind.

Mittelst der Libelle kann man die Ungleichheit der Zapfen auf folgende Art bestimmen. Man lege die Axe auf ihre Lager, und bestimme ihre Neigung n nach der oben gegebenen Anweisung mittelst der Libelle, kehre hierauf die Axe um, und bestimme wieder ihre Neigung n' mittelst der Libelle. Ist nun bei der ersten Lage der Axe der Zapfen auf der rechten Seite der dickste; so können, wenn in Fig. 11. die Linie AB horizontal und $abcd$, $abc'd'$ die Axe in ihren beiden Lagen ist, die drei in der in Rede stehenden Figur dargestellten Fälle vorkommen.

Im ersten Falle (Fig. 11. a.) ist

$$\phi = 2\delta = \alpha - \beta, \quad \delta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Weil aber in diesem Falle offenbar

$$n = \alpha, \quad n' = \beta; \quad \alpha = n, \quad \beta = n'$$

ist; so ist

$$\delta = \frac{n - n'}{2}.$$

Im zweiten Falle (Fig. 11. b.) ist

$$\phi = 2\delta = \alpha + \beta, \quad \delta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Weil aber in diesem Falle

$$n = \alpha, \quad n' = -\beta; \quad \alpha = n, \quad \beta = -n'$$

ist; so ist wieder

$$\delta = \frac{n - n'}{2}.$$

Im dritten Falle (Fig. 11. c.) ist

$$\phi = 2\delta = \beta - \alpha, \quad \delta = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Weil aber in diesem Falle

$$n = -\alpha, \quad n' = -\beta; \quad \alpha = -n, \quad \beta = -n'$$

ist; so ist wieder

$$\delta = \frac{n - n'}{2}.$$

Wäre bei der ersten Lage der Axe der Zapfen auf der rechten Seite der dünnste; so würde man ganz auf dieselbe Art

$$\delta = \frac{n' - n}{2}.$$

erhalten, so dass also überhaupt

$$\delta = \pm \frac{n-n'}{2}$$

und in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem bei der ersten Lage der Axe der Zapfen auf der rechten Seite der dickste oder dünnste ist.

Nehmen wir jetzt die Ungleichheit der Zapfen positiv oder negativ, jenachdem bei der ersten Lage der Axe der Zapfen auf der rechten Seite der dickste oder dünnste ist, und bezeichnen dieselbe unter dieser Voraussetzung durch Δ ; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\Delta = \frac{n-n'}{2}$$

Bezeichnet Z die Dicke des Zapfens, welcher bei der ersten Lage der Axe sich auf der rechten Seite befand, in Linearinheiten, Z' die Dicke des Zapfens auf der linken Seite bei der ersten Lage der Axe; so ist offenbar $Z-Z'$ positiv oder negativ, jenachdem Δ positiv oder negativ ist, und folglich, wenn L die Länge der Axe bezeichnet, offenbar in völliger Allgemeinheit

$$Z - Z' = L \tan \Delta,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$Z - Z' = L \tan \frac{1}{2}(n-n'),$$

so dass man also auf diese Weise, wenn man nur die Länge der Axe kennt, auch die lineare Ungleichheit der Zapfen finden kann.

VII.

Theorie des Spiegelsextanten.

V o r w o r t.

Mit der Theorie des Spiegelsextanten ist es mir auf eine ganz eigene Weise gegangen, welches ich hier in der Kürze erzählen will, weil angehende Mathematiker daraus vielleicht einige bei ihren eignen Studien ihnen nützliche Lehren schöpfen können. Als ich mir vor einigen Jahren einen sehr schönen Spiegelsextanten von *Pistor* angeschafft hatte, war es, wie das meine Gewohnheit ist, mein erstes Bestreben, mich mit der Theorie dieses Instruments vollständig bekannt zu machen. Dass ich dabei zuerst nach *Bohnenbergers Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich mittelst des Spiegelsextanten* griff, war natürlich, weil ja dieses Buch seit dem Jahre 1795, wo es erschien, für die Theorie und den Gebrauch des Sextanten immer als classisch gegolten hat und vielfach empfohlen worden ist. So sehr ich mich aber auch bemühte, konnte ich doch durch *Bohnenbergers* Darstellung durchaus nicht zur gewünschten Klarheit gelangen, und bemerkte bald, dass in seiner Darstellung eine grosse Verwirrung herrsche, ja dass seine Theorie in den Principien völlig falsch und verfehlt sey. Den Grund hiervon fand ich in der unrichtigen Ansicht, welche *Bohnenberger* von dem von der Alhidade angegebenen, wegen des Collimationsfehlers verbesserten Winkel hat. Unter diesem Winkel versteht nämlich *Bohnenberger* immer die Projection des zu messenden Winkels auf der Ebene des Sextanten. Nach meiner Ansicht, für welche die Gründe sich in der folgenden Abhandlung finden, ist dagegen dieser Winkel jederzeit der doppelte spitze Winkel, unter welchem die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene gegen einander geneigt sind. Freilich stand meiner Ansicht über *Bohnenbergers* Theorie das grosse Ansehen ihres Urhebers, der allgemein anerkannte grosse Werth des Buches, in welchem dieselbe sich findet, und auch der Umstand entgegen, dass seit dem Jahre 1795, wo *Bohnenbergers* Buch erschien, die Unrichtigkeit seiner Theorie noch von Niemand bemerkt, wenigstens, so viel mir bekannt war, nirgends öffentlich ausgesprochen worden war. Indess war ich von der Richtigkeit meiner Ansicht überzeugt, und entwickelte mir daher die ganze Theorie des Spiegelsextanten, den oben ausgesprochenen Begriff des von der Alhidade angegebenen, wegen des Collimationsfehlers verbesserten Winkels zum Grunde legend, selbst so vollständig und allgemein als möglich mit Hülfe der allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie, etwa auf die Weise, wie sie in der folgenden Abhandlung wieder gegeben ist. Dass die von mir gefundenen Resultate von *Bohnenbergers* Formeln in mehreren wesentlichen Punkten abweichen mussten, war natürlich, da ja beiden Theorieen verschiedene Principien zum Grunde lagen. Später erhielt ich *Enckes* Abhandlung über den Spiegelsextanten im *Berliner astronomischen Jahrbuche* für 1830, und liess es nun mein erstes Geschäft seyn, eine Vergleichung zwischen den von *Encke* gefundenen Resultaten und den von mir erhaltenen, von *Bohnenberger* abweichenden Formeln anzustellen. Da fielen mir gleich zuerst auf S. 292. die folgenden Worte *Enckes* in die Augen: »Die Vergleichung mit den Vorschriften in *Bohnenberger* zeigt, wie sich erwarten liess, eine völlige Übereinstimmung«, wodurch also *Encke* sich mit *Bohnenberger* völlig einverstanden erklärte. So hatte ich nun zwei Gegner, und zwar zwei sehr gewichtige, mir in jeder Beziehung weit überlegene Gegner gegen mich, welches mich

natürlich gegen meine Theorie misstrauisch machen musste. Ich revidirte alle meine Rechnungen von Neuem, und erwog auch die meiner Theorie zum Grunde liegenden Principien nach allen möglichen Seiten hin. Immer aber kam ich darauf zurück, dass meine Ansicht von dem durch die Alhidade angegebenen, wegen des Collimationsfehlers verbesserten Winkels die richtige und der Natur der Sache allein angemessene, *Bohnenbergers* Ansicht von diesem Winkel dagegen falsch und völlig verfehlt sey; auch erwiesen sich mir alle meine Rechnungen und Formeln immer als völlig richtig. Freilich fand ich, dass in einem Falle, wenn nämlich beide Spiegel auf der Sextantenebene senkrecht stehen und nur die Visirlinie gegen dieselbe geneigt ist, *Bohnenbergers* Theorie ganz dieselbe Formel liefert, wie meine Untersuchungen. Dies konnte mich aber in meiner Ansicht nicht wankend machen, weil eine sorgfältige, auf dem Wege der Rechnung vollständig durchgeführte Untersuchung mir zeigte, dass in dem in Rede stehenden speciellen Falle die Projection des zu messenden Winkels auf der Sextantenebene dem doppelten spitzen Neigungswinkel der Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene jederzeit genau gleich ist, so dass also natürlich in diesem Falle beide Untersuchungen zu demselben Resultate führen mussten. Um endlich mit dieser Sache völlig auf's Reine zu kommen, studirte ich nun die a. a. O. von *Encke* mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie angestellte Untersuchung sorgfältig, und fand sogleich, dass *Encke* unter dem von der Alhidade angegebenen, wegen des Collimationsfehlers verbesserten Winkel ganz denselben Winkel versteht wie ich. Denn wenn *Encke* S. 288. sagt, der abgelesene Winkel sey der doppelte spitze Winkel, welchen die Projectionen zweier auf die Spiegelebenen errichteter Perpendikel auf der Sextantenebene mit einander einschliessen (wenigstens geht dies aus seinen Worten und der Art, wie er die Untersuchung führt, deutlich hervor); so erhellet doch mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung auf der Stelle, dass der letztere Winkel jederzeit dem spitzen Winkel, welchen die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene mit einander einschliessen, gleich ist, und dass also *Enckes* Ansicht völlig mit der meinigen übereinstimmt, von der Ansicht *Bohnenbergers* aber abweicht. Nachdem ich zu dieser Überzeugung gelangt war, suchte ich mir nun die Frage: ob *Enckes* Formeln mit den von mir entwickelten übereinstimmen, zu beantworten, und in der That zeigte eine hierüber angestellte sorgfältige Untersuchung die vollständigste und schönste Übereinstimmung, so dass also die von mir entwickelte Theorie mit der von *Encke* gegebenen völlig im Einklange stand. Ein Räthsel blieb nun aber immer noch zu lösen: wie nämlich *Encke* sagen konnte: „Die Vergleichung mit *Bohnenberger* zeigt, wie sich erwarten liess, eine völlige Übereinstimmung.“ Die Lösung dieses Räthsels fand ich aber sogleich darin, dass *Encke* bloss die aus seiner und *Bohnenbergers* Theorie fliessenden *Näherungsformeln*, nicht die *völlig genauen Formeln*, auf die es hierbei natürlich allein ankommen kann, mit einander verglichen hat. Diese Näherungsformeln stimmen allerdings mit einander überein; die völlig genauen Formeln aber keinesweges, wie ich in der folgenden Abhandlung selbst völlig deutlich gezeigt zu haben glaube. Auch habe ich den Grund dieser auf den ersten Anblick auffallenden Erscheinung nachzuweisen gesucht, welcher, um dies hier nur im Allgemeinen anzudeuten, darin liegt, dass die Projection des zu messenden Winkels auf der Sextantenebene und der doppelte Neigungswinkel der Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene, wenn der Sextant mit sehr kleinen Fehlern behaftet ist, nur um äusserst kleine Grössen, nämlich bloss um Grössen der zweiten Ordnung von einander verschieden sind.

Alles, was ich hier in der Kürze angedeutet habe, findet man in der folgenden Abhandlung vollständig ausgeführt, und zwar fast bloss mit Hülfe der Formeln der analytischen Geometrie, indem dieselbe hauptsächlich mit den Zweck hat, die Anwen-

dung dieses schönen, in neuerer Zeit so überaus vervollkommneten Theils der Mathematik zu zeigen. Merkwürdig bleibt es aber allerdings, dass in einem so viel gebrauchten, in so Vieler Händen sich befindenden, schon vor mehr als dreissig Jahren erschienenen Buche, nämlich in *Bohnenbergers Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung*, eine ganz falsche und völlig verfehlte Theorie über einen wichtigen Gegenstand der praktischen Astronomie sich findet, ohne dass dies bis jetzt, so viel mir wenigstens bekannt ist, öffentlich ausgesprochen worden ist, wobei ich aber nicht im Entferntesten die Absicht habe, den sonstigen grossen Verdiensten des nunmehr verewigten trefflichen Verfassers des genannten Buches zu nahe zu treten, auch den sonstigen Werth dieses Buches keinesweges verkenne. *Enckes* schöne Abhandlung enthält die allein völlig richtige Theorie des Spiegelsextanten, und die ganz unabhängig von dieser Abhandlung, auch auf ganz anderm Wege gefundenen, in der folgenden Abhandlung niedergelegten Resultate stimmen mit *Enckes* Formeln vollständig überein. Viele treffliche praktische Bemerkungen, die ich in der folgenden Abhandlung nicht wiederholt habe, müssen in dem Aufsätze *Enckes* selbst nachgesehen werden; in dieser Beziehung verdient aber auch *Bohnenbergers* Buch besonders empfohlen zu werden.

1.

Die Richtigkeit des Spiegelsextanten, dessen Einrichtung und Gebrauch wir hier als bekannt voraussetzen, erfordert, dass die Visirlinie der Ebene des Sextanten parallel ist, dass die Ebenen der beiden Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehen, und dass, wenn der Nullpunkt des Nonius mit dem Nullpunkte des Limbus zusammenfällt, die Durchschnittslinien der Ebenen der beiden Spiegel mit der Sextantenebene einander parallel sind *). Sind diese vier Bedingungen mit völliger Schärfe erfüllt; so wird, wenn man mit dem Sextanten einen Winkel nach dem bekannten Verfahren misst, jederzeit die Angabe des Nonius das genaue Maass des zu bestimmenden Winkels seyn, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Sind nämlich in Fig. 12. *KL* und *MN* respective die Durchschnitte der Ebenen des kleinen und grossen Spiegels mit der Sextantenebene, welche die Ebene des Papiers seyn mag, *AD* und *BC* die Projectionen der von den Objecten zur Linken und zur Rechten respective auf den kleinen und grossen Spiegel fallenden Strahlen, *CD* die Projection des von dem grossen auf den kleinen Spiegel reflectirten Strahls auf der Ebene des Sextanten; so ist der Winkel *E*, welchen man erhält, wenn man die Linien *AD* und *BC* über *D* und *C* hinaus bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert, die Projection des zu messenden Winkels auf der Ebene des Sextanten, und unter den gemachten Voraussetzungen, dass die Ebenen der beiden Spiegel auf der Sextantenebene senkrecht stehen und die Visirlinie der Sextantenebene parallel ist, offenbar dem zu messenden Winkel gleich, so dass also unter den in Rede stehenden Voraussetzungen *E* der zu messende Winkel ist. In der Figur sind die Winkel, die nach den Gesetzen der Zurückwer-

*) Angenommen wird im Folgenden, dass die Umdrehungsaxe der Alhidade auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehe, indem, wenn dies nicht der Fall wäre, der Neigungswinkel des grossen Spiegels gegen die Sextantenebene veränderlich seyn würde. Eben so ziehen wir die Fehler, welche durch den Nichtparallelismus der beiden die Spiegel und die farbigen Gläser begrenzenden Ebenen herbeigeführt werden, hier nicht in Betracht. Bedient man sich bei der Messung von Vertikalwinkeln des sogenannten angequickten Quecksilber-Horizonts, so sind von dieser Seite her keine Fehler zu befürchten. Diese vortreffliche Einrichtung verdient immer mehr in Anwendung zu kommen und allgemeiner bekannt zu werden.

fung der Lichtstrahlen einander gleich sind, durch dieselben Buchstaben bezeichnet worden, und mittelst einer sehr einfachen geometrischen Betrachtung erhellet auf der Stelle die Richtigkeit der beiden Gleichungen

$$E = 2\phi - 2\psi = 2(\phi - \psi), \quad F = \phi - \psi,$$

so dass also $E = 2F$ und folglich unter den gemachten Voraussetzungen der zu messende Winkel immer dem doppelten spitzen Winkel gleich ist, unter welchem die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene gegen einander geneigt sind. Weil wir nun angenommen haben, dass, wenn der Nullpunkt des Nonius mit dem Nullpunkte des Limbus zusammenfällt, die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen einander parallel seyn sollen; so wird bei jeder Lage, welche man der Alhidade auch geben mag, der spitze Winkel, unter welchem die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene gegen einander geneigt sind, offenbar von dem von dem Nullpunkte des Nonius auf dem Limbus abgeschnittenen Bogen gemessen. Weil nun aber die Theilung auf dem Limbus eines jeden Sextanten, wie wir hier als bekannt voraussetzen, so eingerichtet ist, dass halbe Maasstheile der Bogen oder Winkel für ganze Maasstheile desselben Namens gerechnet werden; so ist aus allem Obigen völlig klar, dass unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die unmittelbare Angabe des Nonius das Maass des zu bestimmenden Winkels ist.

2.

Jetzt wollen wir aber annehmen, dass keine der im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Bedingungen, deren Erfüllung die völlige Richtigkeit des Sextanten fordert, erfüllt, der Sextant demnach in jeder der vier angedeuteten Beziehungen fehlerhaft sey, so dass also keiner der beiden Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehen, die Visirlinie der Ebene des Sextanten nicht parallel seyn, und, wenn die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene einander parallel sind, der Nullpunkt des Nonius nicht mit dem Nullpunkte des Limbus zusammenfallen soll. Dies vorausgesetzt, hat man sich zuvörderst die folgenden Begriffe zu völliger Deutlichkeit zu bringen.

Wir haben angenommen, dass, wenn die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene parallel sind, der Nullpunkt des Nonius mit dem Nullpunkte des Limbus nicht zusammenfallen soll. Den kleinen Bogen, um welchen die Nullpunkte des Nonius und des Limbus von einander abstehen, wenn die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene einander parallel sind, nennt man den *Collimations-* oder *Indexfehler* des Sextanten, und betrachtet denselben als positiv oder als negativ, jenachdem bei der parallelen Lage der Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene der Nullpunkt des Nonius auf dem Limbus des Sextanten selbst oder auf dem sogenannten Excedens, worunter man bekanntlich den Bogen versteht, um welchen auf jedem Sextanten der eigentliche Limbus über seinen Nullpunkt hinaus verlängert ist, liegt. Hat man nun bei irgend einer Lage der Alhidade den Bogen w abgelesen; so ist, wenn c den in Theilen des Limbus ausgedrückten und den oben gegebenen Bestimmungen gemäss positiv oder negativ genommenen Collimationsfehler des Sextanten bezeichnet, jederzeit $\frac{1}{2}(w - c)$ das genaue Maass des spitzen Winkels, unter welchem die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene gegen einander geneigt sind, wovon die Richtigkeit auf der Stelle einleuchten wird, wenn man nur überlegt: 1. dass der Collimationsfehler der Bogen ist, um welchen bei der parallelen Lage der Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene die Nullpunkte des Nonius und des Limbus von einander abstehen; 2. dass der Collimationsfehler als positiv oder als negativ betrachtet

wird, jenachdem bei der parallelen Lage der Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene der Nullpunkt des Nonius auf dem Limbus des Sextanten selbst oder auf dem Excedens liegt; 3. dass die Theilung des Limbus des Sextanten so eingerichtet ist, dass halbe Maasstheile der Bogen für ganze Maasstheile desselben Namens gerechnet werden. Wir werden in der Folge den unmittelbar von der Alhidade angegebenen Bogen immer durch w bezeichnen und den *abgelesenen Bogen* nennen. Den um den Collimationsfehler c verminderten abgelesenen Bogen w , d. h. die Differenz $w - c$, werden wir dagegen in der Folge den *corrigirten abgelesenen Bogen* nennen und durch W bezeichnen, so dass also jederzeit $W = w - c$ ist. Frägt man sich nun, was der corrigirte abgelesene Bogen für eine geometrische Bedeutung hat, oder welcher Winkel durch denselben eigentlich gemessen wird; so ist diese Frage nach dem Obigen offenbar dahin zu beantworten, dass der *corrigirte abgelesene Bogen jederzeit das Maass des spitzen Winkels ist, unter welchem die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene gegen einander geneigt sind*, welches man wohl fest zu halten hat, wenn man alles Folgende gehörig verstehen will. Der so eben ausgesprochene Satz ist die vorzüglichste Grundlage unserer ganzen folgenden Untersuchung, das eigentliche Princip, auf welchem dieselbe ganz beruht, und ist deshalb auch hier besonders hervorgehoben worden.

Misst man nun mit dem Sextanten nach dem bekannten Verfahren einen Winkel wirklich; so soll unter dem *wahren zu messenden Winkel* immer der Winkel verstanden werden, unter welchem, im Sinne der neuern analytischen Geometrie, der von dem Objecte zur Linken auf den kleinen Spiegel, und der von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallende Lichtstrahl gegen einander geneigt sind. Dass die beiden in Rede stehenden Strahlen sich nicht immer wirklich schneiden, sondern häufig nur durchkreuzen werden, erhellet leicht. Eben so leicht erhellet aber auch, dass man den in Rede stehenden Winkel, wobei man den Zusatz: *im Sinne der neuern analytischen Geometrie* wohl zu beachten hat, immer ohne allen merklichen Fehler als den wahren zu messenden Winkel betrachten kann, wenn nur die beiden, die Strahlen aussendenden Objecte, wie z. B. alle Weltkörper, sehr weit von dem Standpunkte des Beobachters entfernt sind. Zu Winkelmessungen zwischen nahen Objecten ist aber bekanntlich der Sextant überhaupt nicht brauchbar, wenn man nicht an den gemessenen Winkeln noch besondere Correctionen anbringen will, welches aber jetzt nicht hierher gehört. Den wahren zu messenden Winkel werden wir im Folgenden immer durch W_1 bezeichnen.

Dies vorausgesetzt, stellt sich nun die vorliegende Abhandlung die Aufgabe: *allgemeine Formeln zu entwickeln, mittelst welcher, wenn die Grössen der vier Fehler des Sextanten, von denen im Obigen ausführlich die Rede gewesen ist, bekannt sind, aus dem abgelesenen Winkel w immer der wahre zu messende Winkel W_1 berechnet werden kann*. Zuerst werde ich, dem Sextanten immer den Collimationsfehler c beilegend, jeden der drei Fehler für sich betrachten, indem ich nämlich annehme, dass der Sextant bloss mit einem dieser drei Fehler auf ein Mal behaftet ist, die beiden andern Fehler aber Null sind. Dann werde ich nach einer von der bei dieser Untersuchung angewandten verschiedenen Methode eine ganz allgemeine Formel für den Fall entwickeln, wenn das Instrument, ausser mit dem Collimationsfehler c , auch mit allen drei übrigen Fehlern zugleich behaftet ist, und hierauf zeigen, wie sich die früher entwickelten speciellen Formeln aus dieser allgemeinen Formel ableiten lassen, welches zugleich die beste Controlle für die Richtigkeit der allgemeinen analytischen Rechnungen seyn wird. Mehrere praktische und verschiedene andere Bemerkungen werden endlich die Abhandlung beschliessen. Die ganze Untersuchung wird sich von allen frühern Arbeiten über denselben Gegenstand wesentlich, rücksichtlich der angewandten Methode aber

auch namentlich dadurch unterscheiden, dass ich mich, wenn es nur irgend ohne zu grosse Weitläufigkeit geschehen kann, bei allen Entwicklungen bloss der allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie bediene. Die Einrichtung des Sextanten und die Art und Weise seines Gebrauchs setze ich, wie schon mehrmals erinnert worden ist, als bekannt voraus.

Wiederholt mag auch hier, der grossen Wichtigkeit der Sache für das Folgende wegen, noch ein Mal werden, dass c immer den Collimations- oder Indexfehler bezeichnet, w der unmittelbar abgelesene Bogen, $w - c = W$ der corrigirte abgelesene Bogen ist, dass $\frac{1}{2}W = \frac{1}{2}(w - c)$ immer das Maass des spitzen Winkels ist, unter welchem die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene gegen einander geneigt sind, und dass W_1 jederzeit den wahren zu messenden Winkel bezeichnet, nämlich den Winkel, unter welchem im Sinne der neuern analytischen Geometrie der von dem Objecte zur Linken auf den kleinen Spiegel, und der von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallende Lichtstrahl gegen einander geneigt sind.

3.

Allen unsern folgenden Untersuchungen ein rechtwinkliges Coordinatensystem zum Grunde legend, sey nun

$$1. \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

überhaupt die Gleichung eines ebenen Spiegels, und

$$2. \quad x = az + a, \quad y = bz + \beta$$

seyen die Gleichungen eines denselben in dem durch die Coordinaten X, Y, Z bestimmten Punkte treffenden Lichtstrahls, wobei wir annehmen wollen, dass dieser Lichtstrahl der Ebene der xy nicht parallel sey. Die Gleichungen des reflectirten Strahls sey

$$3. \quad x = a_1 z + a_1, \quad y = b_1 z + \beta_1.$$

Da der Punkt XYZ in der gegebenen Spiegelebene, in dem einfallenden und reflectirten Strahle liegt; so hat man die folgenden Gleichungen:

$$4. \quad \left. \begin{aligned} AX + BY + CZ + D &= 0; \\ X &= aZ + a, \quad Y = bZ + \beta; \\ X &= a_1Z + a_1, \quad Y = b_1Z + \beta_1. \end{aligned} \right\}$$

Also ist

$$5. \quad A(x - X) + B(y - Y) + C(z - Z) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Spiegelebene; die Gleichungen des einfallenden Strahles sind

$$6. \quad x - X = a(z - Z), \quad y - Y = b(z - Z);$$

und eben so sind

$$7. \quad x - X = a_1(z - Z), \quad y - Y = b_1(z - Z)$$

die Gleichungen des reflectirten Strahls.

Nach den allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie sind ferner die Gleichungen des Einfallsloths, welches durch den Punkt XYZ geht,

$$8. \quad C(x - X) = A(z - Z), \quad C(y - Y) = B(z - Z).$$

Der einfallende, der reflectirte Strahl und das Einfallslot liegen nach dem bekannten Grundgesetze der Katoptrik in einer Ebene, deren Gleichung

$$9. \quad Kx + Ly + Mz + N = 0$$

seyn mag.

Weil in dieser Ebene der Punkt XYZ liegt; so ist

$$KX + LY + MZ + N = 0,$$

und folglich

$$10. \quad K(x-X) + L(y-Y) + M(z-Z) = 0$$

die Gleichung der in Rede stehenden Ebene.

Weil in dieser Ebene der einfallende Strahl liegt; so ist nach 6. und 10.

$$aK(z-Z) + bL(z-Z) + M(z-Z) = 0,$$

d. i.

$$11. \quad aK + bL + M = 0.$$

Weil ferner in der in Rede stehenden Ebene der reflectirte Strahl liegt; so ist nach 7. und 10.

$$a_1K(z-Z) + b_1L(z-Z) + M(z-Z) = 0,$$

d. i.

$$12. \quad a_1K + b_1L + M = 0.$$

Weil endlich in der in Rede stehenden Ebene auch das Einfallslotth liegt; so ist nach 8. und 10.

$$AK(z-Z) + BL(z-Z) + CM(z-Z) = 0,$$

d. i.

$$13. \quad AK + BL + CM = 0,$$

und wir haben daher die drei folgenden Gleichungen:

$$14. \quad \begin{cases} aK + bL + M = 0, \\ a_1K + b_1L + M = 0, \\ AK + BL + CM = 0. \end{cases}$$

Multiplirt man die zwei ersten dieser Gleichungen mit C ; so erhält man

$$aCK + bCL + CM = 0,$$

$$a_1CK + b_1CL + CM = 0,$$

$$AK + BL + CM = 0;$$

und folglich, wenn man nun die beiden ersten von der dritten subtrahirt,

$$(A - aC)K + (B - bC)L = 0,$$

$$(A - a_1C)K + (B - b_1C)L = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt ferner leicht

$$15. \quad \{(A - aC)(B - b_1C) - (A - a_1C)(B - bC)\} K = 0,$$

und eben so

$$16. \quad \{(A - aC)(B - b_1C) - (A - a_1C)(B - bC)\} L = 0.$$

Nun können aber die Grössen K und L nicht beide zugleich verschwinden. Wäre dies nämlich der Fall; so würde die Gleichung 9. von der Form

$$Mx + N = 0,$$

d. h. z würde eine constante Grösse, und folglich offenbar die Ebene, in welcher der einfallende, der reflectirte Strahl und das Einfallslotth liegen, der Ebene der xy parallel seyn, welches ungereimt ist, weil dann offenbar auch der einfallende Strahl der Ebene der xy parallel seyn würde, da wir doch angenommen haben, dass dies nicht der Fall seyn soll. Es werden also K und L nicht zugleich verschwinden, und wir werden daher immer entweder aus 15. oder aus 16. die Gleichung

17. $(A - aC)(B - b_1C) - (A - a_1C)(B - bC) = 0$
erhalten.

Diese Gleichung lässt sich leicht auf die Form

18. $\{(a - a_1)B - (b - b_1)A - (ab_1 - a_1b)C\} C = 0$
bringen.

Ist nun $C \neq 0$; so folgt aus dieser Gleichung auf der Stelle

$$19. (a - a_1)B - (b - b_1)A - (ab_1 - a_1b)C = 0.$$

Ist aber $C = 0$; so haben die Gleichungen 14. die Form

$$aK + bL + M = 0,$$

$$a_1K + b_1L + M = 0,$$

$$AK + BL = 0;$$

und führen unmittelbar zu den beiden folgenden Gleichungen:

$$(a - a_1)K + (b - b_1)L = 0,$$

$$AK + BL = 0;$$

aus denen sich ferner

$$20. \{(a - a_1)B - (b - b_1)A\} K = 0$$

und

$$21. \{(a - a_1)B - (b - b_1)A\} L = 0,$$

und also, da nach dem Vorhergehenden K und L nicht zugleich verschwinden, immer

$$22. (a - a_1)B - (b - b_1)A = 0$$

ergiebt.

Da die Gleichung 22. aus der Gleichung 19. hervorgeht, wenn man $C = 0$ setzt; so sieht man, dass letztere Gleichung auch für $C = 0$ gilt, und daher immer

$$23. (a - a_1)B - (b - b_1)A - (ab_1 - a_1b)C = 0$$

ist.

Der Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen die gegebene Spiegelebene sey V ; so ist nach den allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie

$$\sin V^2 = \frac{(aA + bB + C)^2}{(1 + a^2 + b^2)(A^2 + B^2 + C^2)}.$$

Weil aber nach dem Grundgesetze der Katoptrik V auch der Neigungswinkel des reflectirten Strahls gegen die Spiegelebene ist; so ist nach den allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie auch

$$\sin V^2 = \frac{(a_1A + b_1B + C)^2}{(1 + a_1^2 + b_1^2)(A^2 + B^2 + C^2)},$$

und folglich

$$24. \frac{(aA + bB + C)^2}{1 + a^2 + b^2} = \frac{(a_1A + b_1B + C)^2}{1 + a_1^2 + b_1^2},$$

oder

$$25. \frac{1 + a^2 + b^2}{1 + a_1^2 + b_1^2} = \left(\frac{aA + bB + C}{a_1A + b_1B + C} \right)^2,$$

oder auch

$$26. (1 + a^2 + b^2)(a_1A + b_1B + C)^2 - (1 + a_1^2 + b_1^2)(aA + bB + C)^2 = 0.$$

Wir

Wir haben also nach 23. und 26. zwischen den vier Grössen a, b, a_1, b_1 die beiden folgenden Gleichungen:

$$27. \begin{cases} (a-a_1) B - (b-b_1) A - (ab_1 - a_1 b) C = 0, \\ (1+a^2+b^2)(a_1 A + b_1 B + C)^2 - (1+a_1^2+b_1^2)(aA+bB+C)^2 = 0. \end{cases}$$

4.

Ist nun die durch die Gleichung 1. characterisirte Spiegelebene auf der Ebene der xy senkrecht; so ist nach Principien der analytischen Geometrie $C=0$, und die beiden Gleichungen 27. gehen also in diesem Falle in die folgenden über:

$$28. \begin{cases} (a-a_1) B - (b-b_1) A = 0, \\ (1+a^2+b^2)(a_1 A + b_1 B)^2 - (1+a_1^2+b_1^2)(aA+bB)^2 = 0. \end{cases}$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen kann man auch unter der Form

$$(1+a^2+b^2)\{a_1(a-a_1)A + b_1(a-a_1)B\}^2 = (1+a_1^2+b_1^2)\{a(a-a_1)A + b(a-a_1)B\}^2,$$

oder unter der Form

$$(1+a^2+b^2)\{a_1(b-b_1)A + b_1(b-b_1)B\}^2 = (1+a_1^2+b_1^2)\{a(b-b_1)A + b(b-b_1)B\}^2$$

schreiben, jenachdem man nämlich die in Rede stehende Gleichung auf beiden Seiten mit $(a-a_1)^2$ oder mit $(b-b_1)^2$ multiplicirt. Weil nun nach der ersten der beiden Gleichungen 28.

$$(a-a_1) B = (b-b_1) A$$

ist; so ist

$$29. (1+a^2+b^2)\{a_1(a-a_1) + b_1(b-b_1)\}^2 A^2 = (1+a_1^2+b_1^2)\{a(a-a_1) + b(b-b_1)\}^2 A^2$$

und

$$30. (1+a^2+b^2)\{a_1(a-a_1) + b_1(b-b_1)\}^2 B^2 = (1+a_1^2+b_1^2)\{a(a-a_1) + b(b-b_1)\}^2 B^2.$$

Die Gleichung der auf der Ebene der xy senkrechten Spiegelebene ist

$$Ax + By + D = 0,$$

und A und B können also offenbar nicht zugleich verschwinden. Daher ergibt sich immer entweder aus 29. oder aus 30. die Gleichung

$$(1+a^2+b^2)\{a_1(a-a_1) + b_1(b-b_1)\}^2 = (1+a_1^2+b_1^2)\{a(a-a_1) + b(b-b_1)\}^2,$$

d. i.

$$(1+a^2+b^2)\{(a_1^2+b_1^2) - (aa_1+bb_1)\}^2 = (1+a_1^2+b_1^2)\{(a^2+b^2) - (aa_1+bb_1)\}^2.$$

Entwickelt man nun die beiden quadratischen Factoren; so erhält man ohne alle Schwierigkeit mittelst einiger ganz leichten Verwandlungen die Gleichung

$$0 = (a^2+b^2-a_1^2-b_1^2)\{(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (ab_1-a_1b)^2\};$$

also entweder

$$a^2+b^2-a_1^2-b_1^2 = 0,$$

oder

$$(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (ab_1-a_1b)^2 = 0.$$

Aus der letzten Gleichung würde

$$a - a_1 = 0, \quad b - b_1 = 0, \quad ab_1 - a_1b = 0;$$

also $a = a_1, b = b_1$ folgen. Weil nun nach 4.

$$X = aZ + \alpha, \quad Y = bZ + \beta;$$

$$X = a_1Z + \alpha_1, \quad Y = b_1Z + \beta_1$$

ist; so würde offenbar auch $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$, und die Gleichungen

$$x = ax + \alpha, \quad y = bx + \beta$$

des einfallenden Strahls daher im Allgemeinen mit den Gleichungen

$$x = a_1x + \alpha_1, \quad y = b_1x + \beta_1$$

des reflectirten Strahls identisch seyn, welches, wie man sogleich übersieht, ungereimt ist. Daher ist nicht

$$(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (ab_1 - a_1b)^2 = 0,$$

und es muss folglich nach dem Obigen

$$a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2 = 0,$$

d. i.

$$31. \quad a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

also auch

$$32. \quad 1 + a^2 + b^2 = 1 + a_1^2 + b_1^2$$

seyn.

Sind nun I und I_1 die, 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel des einfallenden und reflectirten Strahls, deren Gleichungen

$$x = ax + \alpha, \quad y = bx + \beta$$

und

$$x = a_1x + \alpha_1, \quad y = b_1x + \beta_1$$

sind, gegen die Ebene der xy , deren Gleichung $z=0$ ist; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$\sin I = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad \sin I_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}},$$

beide Quadratwurzeln positiv genommen; also nach 32. $\sin I = \sin I_1$, und folglich, weil nach dem Obigen die Winkel I und I_1 neunzig Grade nicht übersteigen, und hier natürlich als positiv angenommen werden, $I = I_1$.

Ist also die Spiegelebene auf der Ebene der xy senkrecht; so sind der einfallende und reflectirte Strahl gegen die Ebene der xy unter gleichen Winkeln geneigt. Obgleich im Vorhergehenden angenommen worden ist, dass der einfallende Strahl der Ebene der xy nicht parallel seyn soll; so sieht man doch leicht, dass, wenn die Spiegelebene auf der Ebene der xy senkrecht und der einfallende Strahl der Ebene der xy parallel ist, jederzeit auch der reflectirte Strahl der Ebene der xy parallel seyn wird, und dass also auch in diesem Falle der einfallende und reflectirte Strahl als gegen die Ebene der xy unter gleichen Winkeln geneigt betrachtet werden können. Da nun die Ebene der xy offenbar die Stelle einer jeden beliebigen Ebene vertreten kann; so ergibt sich das folgende Theorem:

I. Wenn die Spiegelebene auf einer beliebigen Ebene senkrecht steht; so sind der einfallende und reflectirte Strahl gegen diese Ebene immer unter gleichen Winkeln geneigt.

Auch ist klar, dass aus diesem Satze sich als eine Erweiterung desselben ferner unmittelbar das folgende Theorem ergibt:

II. Wenn mehrere Spiegelebenen in beliebiger Anzahl auf einer und derselben Ebene sämtlich senkrecht stehen, auf die erste Spiegelebene ein Lichtstrahl fällt, der von dieser Spiegelebene reflectirte Strahl die zweite Spiegelebene trifft, der von dieser Spiegelebene reflectirte Strahl auf die dritte Spiegelebene fällt, von dieser wieder reflectirt wird, u. s. w.; so sind der auf die erste Spiegelebene fallende und der von der letzten Spiegelebene reflectirte Strahl gegen die Ebene, auf welcher alle Spiegelebenen senkrecht stehen, jederzeit unter gleichen Winkeln geneigt.

Man kann aus dem Vorhergehenden auch leicht noch das folgende Theorem herleiten:

III. Wenn eine Spiegelebene auf einer andern Ebene senkrecht steht, und erstere von einem Lichtstrahle getroffen wird; so sind die Projectionen des einfallenden und reflectirten Strahls gegen die gemeinschaftliche Durchschnittslinie beider Ebenen jederzeit unter gleichen Winkeln geneigt.

Dieser Satz lässt sich auf folgende Art beweisen. Die Gleichung der Durchschnittslinie der Spiegelebene mit der Ebene, auf welcher sie senkrecht steht, die wir wieder als Ebene der xy annehmen, ist nach 1.

$$Ax + By + D = 0,$$

oder

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}.$$

Die Gleichungen der Projectionen des einfallenden und reflectirten Strahls auf der Ebene der xy sind, wie sich aus dem Obigen leicht ergibt,

$$y - \beta = \frac{b}{a}(x - a) \text{ und } y - \beta_1 = \frac{b_1}{a_1}(x - a_1).$$

Bezeichnen wir nun die Winkel, unter denen diese Projectionen gegen die Durchschnittslinie der Spiegelebene mit der Ebene der xy geneigt sind, durch ω und ω_1 ; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$\text{tang } \omega^2 = \left(\frac{aA + bB}{aB - bA} \right)^2, \quad \text{tang } \omega_1^2 = \left(\frac{a_1A + b_1B}{a_1B - b_1A} \right)^2.$$

Aus der ersten der beiden Gleichungen 28. ergibt sich aber sogleich

$$aB - bA = a_1B - b_1A,$$

und aus der zweiten dieser beiden Gleichungen und der Gleichung 32. folgt

$$(aA + bB)^2 = (a_1A + b_1B)^2.$$

Also ist offenbar $\text{tang } \omega^2 = \text{tang } \omega_1^2$, und folglich, weil ω und ω_1 zwei positive spitze Winkel sind, $\omega = \omega_1$, wie bewiesen werden sollte.

Als eine Erweiterung dieses Satzes kann der folgende, aus demselben sich unmittelbar ergebende Satz betrachtet werden:

IV. Wenn mehrere Spiegelebenen in beliebiger Anzahl auf einer und derselben Ebene senkrecht stehen, auf die erste Spiegelebene ein Lichtstrahl fällt, der von dieser Spiegelebene reflectirte Strahl die zweite Spiegelebene trifft, der von dieser Spiegelebene reflectirte Strahl auf die dritte Spiegelebene fällt, von dieser wieder reflectirt wird, u. s. w.; so sind für jede dieser sämtlichen Spiegelebenen die Projectionen des einfall-

lenden und reflectirten Strahls auf der Ebene, auf welcher alle Spiegelebenen senkrecht stehen, gegen die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der in Rede stehenden Spiegelebene unter gleichen Winkeln geneigt.

5.

Wir wollen nun ferner annehmen, dass die Spiegelebene weder auf der Ebene der xy senkrecht sey, noch mit derselben zusammenfalle, und von einem der Ebene der xy parallelen Strahle, dessen Gleichungen

$$33. \quad y = ax + a, \quad z = \beta$$

seyn mögen, in dem Punkte XYZ getroffen werde, und wollen unter diesen Voraussetzungen, wenn

$$34. \quad y = a_1x + a_1, \quad z = b_1x + \beta_1$$

die Gleichungen des reflectirten Strahls sind, die Coefficienten a_1 und b_1 in diesen Gleichungen zu bestimmen suchen, woraus sich dann ferner auch leicht ein Ausdruck für den Neigungswinkel I_1 des reflectirten Strahls gegen die Ebene der xy ergeben wird. Der Einfachheit wegen möge aber angenommen werden, dass die Durchschnittsline der Spiegelebene mit der Ebene der xy die Axe der x sey. Der, 180° nicht übersteigende Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil der Spiegelebene mit dem positiven Theile der Ebene der xy , in welchem die positiven y genommen werden, einschliesst, soll durch i bezeichnet werden, wo, wie sich von selbst versteht, i grösser und kleiner als neunzig Grade seyn kann. Dann ist, wie sogleich erhellen wird, jederzeit

$$35. \quad -y \operatorname{tang} i + z = 0$$

die Gleichung der Spiegelebene.

Weil der Punkt XYZ in der Spiegelebene, im einfallenden und reflectirten Strahle liegt; so hat man die folgenden Gleichungen:

$$-Y \operatorname{tang} i + Z = 0;$$

$$Y = aX + a, \quad Z = \beta;$$

$$Y = a_1X + a_1, \quad Z = b_1X + \beta_1;$$

und die Gleichungen der Spiegelebene, des einfallenden und des reflectirten Strahls sind daher auch respective:

$$36. \quad -(y - Y) \operatorname{tang} i + z - Z = 0;$$

$$37. \quad y - Y = a(x - X), \quad z - Z = 0;$$

$$38. \quad y - Y = a_1(x - X), \quad z - Z = b_1(x - X).$$

Die Gleichungen des Einfallsloths sind nach Principien der analytischen Geometrie

$$39. \quad x - X = 0, \quad y - Y = -(z - Z) \operatorname{tang} i.$$

Die Gleichung der Ebene, in welcher nach dem Grundgesetze der Katoptrik der einfallende und reflectirte Strahl und das Einfallslot liegen, sey

$$40. \quad Kx + Ly + Mz + N = 0.$$

Da in dieser Ebene der Punkt XYZ liegt; so ist

$$KX + LY + MZ + N = 0,$$

und die Gleichung der in Rede stehenden Ebene ist folglich auch

$$41. \quad K(x - X) + L(y - Y) + M(z - Z) = 0.$$

Weil in dieser Ebene der einfallende Strahl liegt; so ist nach 37. und 41.

$$K(x-X) + aL(x-X) = 0,$$

d. i.

$$42. \quad K + aL = 0.$$

Weil in der in Rede stehenden Ebene der reflectirte Strahl liegt; so ist nach 38. u. 41.

$$K(x-X) + a_1L(x-X) + b_1M(x-X) = 0,$$

d. i.

$$43. \quad K + a_1L + b_1M = 0.$$

Weil ferner in der in Rede stehenden Ebene auch das Einfallslloth liegt; so ist nach 39. und 41.

$$-L(x-Z) \operatorname{tangi} + M(x-Z) = 0,$$

d. i.

$$44. \quad -L \operatorname{tangi} + M = 0.$$

Also hat man die drei folgenden Gleichungen:

$$45. \quad \begin{cases} K + aL = 0 : \\ K + a_1L + b_1M = 0, \\ -L \operatorname{tangi} + M = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht

$$K + aL = 0,$$

$$K + (a_1 + b_1 \operatorname{tangi}) L = 0;$$

folglich

$$46. \quad (a - a_1 - b_1 \operatorname{tangi}) K = 0$$

und

$$47. \quad (a - a_1 - b_1 \operatorname{tangi}) L = 0.$$

Wären nun K und L beide $= 0$; so wäre nach 40. die Gleichung der Ebene, in welcher der einfallende und reflectirte Strahl und das Einfallslloth liegen,

$$Mx + N = 0,$$

d. h. x eine constante Grösse, die in Rede stehende Ebene folglich der Ebene der xy parallel, welches offenbar ungereimt ist, weil wir angenommen haben, dass i kein rechter Winkel seyn soll, weshalb also das Einfallslloth, und daher auch die in Rede stehende Ebene die Ebene der xy nothwendig schneiden muss. Weil also K und L nicht zugleich verschwinden; so ergiebt sich aus 46. oder 47. immer die Gleichung

$$48. \quad a - a_1 - b_1 \operatorname{tangi} = 0.$$

Ist V der Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen die Spiegelebene; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$\sin V^2 = \frac{a^2 \operatorname{tangi}^2}{(1+a^2)(1+\operatorname{tangi}^2)}.$$

Weil nun aber nach dem Grundgesetze der Katoptrik V auch der Neigungswinkel des reflectirten Strahls gegen die Spiegelebene ist; so ist nach Principien der analytischen Geometrie auch

$$\sin V^2 = \frac{(b_1 - a_1 \operatorname{tangi})^2}{(1+a_1^2+b_1^2)(1+\operatorname{tangi}^2)},$$

und man hat daher die Gleichung

$$49. \frac{a^2 \operatorname{tangi}^2}{1 + a^2} = \frac{(b_1 - a_1 \operatorname{tangi})^2}{1 + a_1^2 + b_1^2},$$

oder

$$50. \frac{1 + a^2}{1 + a_1^2 + b_1^2} = \left(\frac{a \operatorname{tangi}}{b_1 - a_1 \operatorname{tangi}} \right)^2.$$

Nach 48. ist

$$b_1 - a_1 \operatorname{tangi} = \frac{a - a_1}{\operatorname{tangi}} - a_1 \operatorname{tangi} = \frac{a - a_1 \sec i^2}{\operatorname{tangi}},$$

$$1 + a_1^2 + b_1^2 = 1 + a_1^2 + \frac{(a - a_1)^2}{\operatorname{tangi}^2} = \frac{a^2 + \operatorname{tangi}^2 - 2aa_1 + a_1^2 \sec i^2}{\operatorname{tangi}^2}.$$

Also ist nach 49.

$$\frac{a^2 \operatorname{tangi}^2}{1 + a^2} = \frac{(a - a_1 \sec i^2)^2}{a^2 + \operatorname{tangi}^2 - 2aa_1 + a_1^2 \sec i^2}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man leicht

$$\begin{aligned} 0 = & a^2(1 - \operatorname{tangi}^4) + a^4(1 - \operatorname{tangi}^2) \\ & - 2aa_1(\sec i^2 + a^2 \sec i^2 - a^2 \operatorname{tangi}^2) \\ & + a_1^2(\sec i^4 + a^2 \sec i^4 - a^2 \operatorname{tangi}^2 \sec i^2), \end{aligned}$$

und folglich, weil

$$\begin{aligned} \sec i^2 - \operatorname{tangi}^2 &= 1 + \operatorname{tangi}^2 - \operatorname{tangi}^2 = 1, \\ \sec i^4 - \operatorname{tangi}^2 \sec i^2 &= \sec i^4 - (\sec i^2 - 1) \sec i^2 = \sec i^2 \end{aligned}$$

ist,

$$\begin{aligned} 0 = & a^2(1 - \operatorname{tangi}^4) + a^4(1 - \operatorname{tangi}^2) - 2aa_1(a^2 + \sec i^2) \\ & + a_1^2(\sec i^4 + a^2 \sec i^2) \\ = & a^2(1 - \operatorname{tangi}^4) + a^4(1 - \operatorname{tangi}^2) - 2aa_1(a^2 + \sec i^2) \\ & + a_1^2 \sec i^2(a^2 + \sec i^2). \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} a^2(1 - \operatorname{tangi}^4) + a^4(1 - \operatorname{tangi}^2) &= a^2(1 + \operatorname{tangi}^2 + a^2)(1 - \operatorname{tangi}^2) \\ &= a^2(1 - \operatorname{tangi}^2)(a^2 + \sec i^2), \end{aligned}$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} 51. \quad 0 = & a^2(1 - \operatorname{tangi}^2)(a^2 + \sec i^2) \\ & - 2aa_1(a^2 + \sec i^2) + a_1^2 \sec i^2(a^2 + \sec i^2). \end{aligned}$$

Da nun

$$\sec i^2 = 1 + \operatorname{tangi}^2$$

nie = 0 seyn kann; so ist auch, $a^2 + \sec i^2$ nicht = 0, und folglich nach der Gleichung 51.

$$52. \quad 0 = a^2(1 - \operatorname{tangi}^2) - 2aa_1 + a_1^2 \sec i^2,$$

oder, wie man leicht findet,

$$53. \quad a_1^2 - \frac{2a}{\sec i^2} a_1 = a^2(\sin i^2 - \cos i^2).$$

Bestimmt man nun aus dieser quadratischen Gleichung a_1 ; so erhält man nach leichter Rechnung

$$54. \quad a_1 = a(\cos i^2 \pm \sin i^2),$$

und folglich nach 48.

$$55. \quad b_1 = \frac{a (\sin i^2 \mp \sin i^2)}{\tan i}.$$

Wollte man in den Gleichungen 54. und 55. die obere Zeichen nehmen; so würde $b_1 = 0$, und folglich, wie sich aus den Gleichungen 34. sogleich ergibt, der reflectirte Strahl der Ebene der xy parallel seyn. Da nun aber auch der einfallende Strahl der Ebene der xy parallel ist; so wäre die Ebene, in welcher der einfallende und reflectirte Strahl und das Einfallslot liegen, der Ebene der xy parallel, welches gegen das Obige streitet. Daher muss man in den Gleichungen 54. und 55. die unteren Zeichen nehmen, und erhält, wenn man dies thut, nach einigen bekannten goniometrischen Formeln leicht

$$56. \quad a_1 = a \cos 2i, \quad b_1 = a \sin 2i,$$

Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist nun

$$\sin I_1^2 = \frac{b_1^2}{1 + a_1^2 + b_1^2}.$$

Also ist nach 56.

$$57. \quad \sin I_1^2 = \frac{a^2 \sin 2i^2}{1 + a^2}.$$

Ist θ der Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen die Ebene der yz ; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$58. \quad \sin \theta^2 = \frac{1}{1 + a^2}, \quad \cos \theta^2 = \frac{a^2}{1 + a^2};$$

folglich nach 57.

$$\sin I_1^2 = \cos \theta^2 \sin 2i^2;$$

also ist

$$59. \quad \sin I_1 = \pm \cos \theta \sin 2i,$$

und in dieser Formel das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem i kleiner oder grösser als ein rechter Winkel ist.

6.

Jeder Sextant ist, wie wir schon in §. 1. gesehen haben, ausser mit dem Collimationsfehler auch noch mit den drei folgenden Fehlern behaftet:

1. Nichtparallellismus der Visirlinie mit der Ebene des Sextanten.
2. Schiefe Stellung des kleinen Spiegels gegen die Ebene des Sextanten.
3. Schiefe Stellung des grossen Spiegels gegen die Ebene des Sextanten.

Diese drei Fehler wollen wir nun nach der Reihe einer sorgfältigen Untersuchung unterwerfen.

Zuerst nehmen wir an, dass die Ebenen beider Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehen, die Visirlinie aber dieser Ebene nicht parallel, sondern gegen dieselbe unter dem, 90° nicht übersteigenden Winkel i geneigt ist. Die Ebene des Sextanten nehmen wir als Ebene der xy an. Die Gleichung des kleinen Spiegels sey

$$60. \quad Ax + By + D = 0.$$

Die Gleichung des grossen Spiegels in der Lage, bei welcher, nachdem der Collimationsfehler abgezogen worden, der Winkel W abgelesen wird, sey

$$61. \quad A_1x + B_1y + D_1 = 0.$$

Die Gleichungen des durch Reflexion von dem kleinen Spiegel in das Auge des Beobachters gelangenden Lichtstrahls seyen

$$62. \quad x = ax + a, \quad y = bx + \beta.$$

Die Gleichungen des durch Reflexion von dem grossen Spiegel auf den kleinen Spiegel fallenden Lichtstrahls, d. h. die Gleichungen des zwischen beiden Spiegeln liegenden Strahls seyen

$$63. \quad x = a_1x + a_1, \quad y = b_1x + \beta_1.$$

Die Gleichungen des von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallenden Lichtstrahls seyen endlich

$$64. \quad x = a_2x + a_2, \quad y = b_2x + \beta_2.$$

Zwischen den Constanten a, b, a_1, b_1 haben wir nach 28. und 31. die beiden Gleichungen

$$(a - a_1) B = (b - b_1) A, \quad a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

Bestimmen wir aus diesen beiden Gleichungen die Grössen a_1 und b_1 ; so erhalten wir

$$65. \quad \begin{cases} a_1 = \frac{-(bA - aB) B \pm (aA + bB) A}{A^2 + B^2}, \\ b_1 = \frac{(bA - aB) A \pm (aA + bB) B}{A^2 + B^2}; \end{cases}$$

wo sich nun noch fragt, ob man die obern oder die untern Zeichen nehmen muss. Nähme man aber die obern Zeichen; so würde man $a = a_1, b = b_1$ erhalten, welches, wie schon in §. 4. gezeigt worden ist, ungereimt ist. Daher muss man die untern Zeichen nehmen, d. h. man muss

$$66. \quad \begin{cases} a_1 = \frac{(aB - bA) B - (aA + bB) A}{A^2 + B^2}, \\ b_1 = -\frac{(aB - bA) A + (aA + bB) B}{A^2 + B^2}; \end{cases}$$

oder

$$67. \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{a(A^2 - B^2) + 2bAB}{A^2 + B^2}, \\ b_1 = \frac{b(A^2 - B^2) - 2aAB}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

setzen.

Ganz auf dieselbe Weise ist, weil nach der Voraussetzung der grosse Spiegel auch auf der Ebene des Sextanten, d. i. auf der Ebene der xy senkrecht steht,

$$68. \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{a_2(A_1^2 - B_1^2) + 2b_2A_1B_1}{A_1^2 + B_1^2}, \\ b_1 = \frac{b_2(A_1^2 - B_1^2) - 2a_2A_1B_1}{A_1^2 + B_1^2}; \end{cases}$$

und

und man hat daher nach 67. und 68. die beiden folgenden Gleichungen:

$$69. \begin{cases} \frac{a(A^2 - B^2) + 2bAB}{A^2 + B^2} = \frac{a_2(A_1^2 - B_1^2) + 2b_2A_1B_1}{A_1^2 + B_1^2}, \\ \frac{b(A^2 - B^2) - 2aAB}{A^2 + B^2} = \frac{b_2(A_1^2 - B_1^2) - 2a_2A_1B_1}{A_1^2 + B_1^2}. \end{cases}$$

Bestimmt man nun aus diesen Gleichungen a_2 und b_2 ; so erhält man

$$70. \begin{cases} a_2 = \frac{a \{ (AA_1 + BB_1)^2 - (AB_1 - A_1B)^2 \} - 2b(AA_1 + BB_1)(AB_1 - A_1B)}{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)}, \\ b_2 = \frac{b \{ (AA_1 + BB_1)^2 - (AB_1 - A_1B)^2 \} + 2a(AA_1 + BB_1)(AB_1 - A_1B)}{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)}; \end{cases}$$

woraus sich auch leicht

$$71. aa_2 + bb_2 = \frac{(a^2 + b^2) \{ (AA_1 + BB_1)^2 - (AB_1 - A_1B)^2 \}}{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)},$$

$$72. ab_2 - ba_2 = \frac{2(a^2 + b^2)(AA_1 + BB_1)(AB_1 - A_1B)}{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)}$$

ergiebt.

Weil nun bei jeder Winkelmessung mit dem Sextanten der von dem kleinen Spiegel in der Richtung der Visirlinie in das Auge des Beobachters reflectirte Strahl mit dem von dem Objecte zur Linken auf den kleinen Spiegel fallenden Strahle in *einer* geraden Linie liegt; so ist nach Principien der analytischen Geometrie, wobei wegen des Winkels W_1 §. 2. zu vergleichen ist,

$$73. \cos W_1 = \pm \frac{1 + aa_2 + bb_2}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a_2^2 + b_2^2)}},$$

oder, weil nach 32.

$$1 + a^2 + b^2 = 1 + a_1^2 + b_1^2 = 1 + a_2^2 + b_2^2$$

ist,

$$74. \cos W_1 = \pm \frac{1 + aa_2 + bb_2}{1 + a^2 + b^2}.$$

Folglich ist nach 71.

$$75. \cos W_1 = \pm \frac{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2) + (a^2 + b^2) \{ (AA_1 + BB_1)^2 - (AB_1 - A_1B)^2 \}}{(1 + a^2 + b^2)(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)}.$$

Die Gleichungen der Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Ebene des Sextanten sind

$$Ax + By + D = 0, A_1x + B_1y + D_1 = 0.$$

Also ist nach Principien der analytischen Geometrie, wobei §. 2. zu vergleichen ist,

$$76. \cos \frac{1}{2}W^2 = \frac{(AA_1 + BB_1)^2}{(AA_1 + BB_1)^2 + (AB_1 - A_1B)^2},$$

$$77. \sin \frac{1}{2}W^2 = \frac{(AB_1 - A_1B)^2}{(AA_1 + BB_1)^2 + (AB_1 - A_1B)^2};$$

oder, wie man leicht findet,

$$78. \cos \frac{1}{2} W^2 = \frac{(AA_1 + BB_1)^2}{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)}, \sin \frac{1}{2} W^2 = \frac{(AB_1 - A_1 B)^2}{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)}.$$

Daher ist nach 75., wie man sogleich übersieht,

$$79. \cos W_1 = \pm \frac{1 + (a^2 + b^2)(\cos \frac{1}{2} W^2 - \sin \frac{1}{2} W^2)}{1 + a^2 + b^2},$$

oder

$$80. \cos W_1 = \pm \frac{1 + (a^2 + b^2) \cos W}{1 + a^2 + b^2};$$

und folglich, weil nach Principien der analytischen Geometrie

$$\sin i^2 = \frac{1}{1 + a^2 + b^2}, \cos i^2 = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2 + b^2}$$

ist,

$$81. \cos W_1 = \pm (\sin i^2 + \cos i^2 \cos W).$$

Dass dieser Ausdruck mit doppeltem Zeichen erscheint, ist ganz der Natur der Sache gemäss, weil in der That der von dem kleinen Spiegel in das Auge des Beobachters reflectirte, und der von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallende Strahl zwei einander zu zwei rechten Winkeln ergänzende Winkel mit einander einschliessen. Da aber, wie aus §. 1. und §. 2. hervorgeht, bei dem Sextanten, wenn man $i = 0$ setzt, $W_1 = W$ und also auch $\cos W_1 = \cos W$ wird; so hat man in der Gleichung 81. offenbar das obere Zeichen zu nehmen, und erhält daher die Gleichung

$$82. \cos W_1 = \sin i^2 + \cos i^2 \cos W.$$

Zieht man beide Seiten dieser Gleichung von der Einheit ab; so erhält man

$$1 - \cos W_1 = \cos i^2 (1 - \cos W),$$

d. i.

$$\sin \frac{1}{2} W_1^2 = \cos i^2 \sin \frac{1}{2} W^2,$$

und folglich

$$83. \sin \frac{1}{2} W_1 = \cos i \sin \frac{1}{2} W.$$

Nach 82. ist auch

$$\cos W_1 = \cos W + \sin i^2 (1 - \cos W),$$

d. i.

$$84. \cos W_1 = \cos W + 2 \sin i^2 \sin \frac{1}{2} W^2,$$

und nach 83. ist

$$\sin \frac{1}{2} W_1 = \sin \frac{1}{2} W - (1 - \cos i) \sin \frac{1}{2} W,$$

d. i.

$$85. \sin \frac{1}{2} W_1 = \sin \frac{1}{2} W - 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \sin \frac{1}{2} W.$$

Eine Näherungsformel, bei welcher erst Glieder der sechsten Ordnung vernachlässigt werden, lässt sich auf folgende Art finden. Nach 83. ist

$$\sin \frac{1}{2} W_1 = \cos i \sin \frac{1}{2} W,$$

und folglich nach einer aus der Analysis bekannten Reihe

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} W_1 &= \cos i \sin \frac{1}{2} W + \frac{\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{\cos i^3 \sin \frac{1}{2} W^3}{3} \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\cos i^5 \sin \frac{1}{2} W^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

Aber $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$, und folglich, wenn man die Potenzen von $\cos i$ nach dem Binomischen Lehrsatz bis auf Glieder der vierten Ordnung entwickelt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} W_1 &= \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{1 \cdot 2} \sin^4 i \right\} \frac{\sin \frac{1}{2} W}{1} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1)}{1 \cdot 2} \sin^4 i \right\} \frac{\sin \frac{1}{2} W^3}{3} \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left\{ 1 - \frac{5}{2} \sin^2 i + \frac{\frac{5}{2}(\frac{5}{2} - 1)}{1 \cdot 2} \sin^4 i \right\} \frac{\sin \frac{1}{2} W^5}{5} \\ &+ \dots \\ &= \sin \frac{1}{2} W + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} W^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} W^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} W^7}{7} + \dots \\ &- \frac{1}{2} \sin^2 i \sin \frac{1}{2} W \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin^2 i W^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^2 i W^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^2 i W^6 + \dots \right\} \\ &+ \frac{1}{6} \sin^4 i \left\{ -\sin \frac{1}{2} W + 1 \cdot \frac{1}{2} \sin W^3 + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin \frac{1}{2} W^5 \right. \\ &\quad \left. + 5 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin \frac{1}{2} W^7 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2} W - \frac{1}{2} \sin^2 i \sin \frac{1}{2} W (1 - \sin^2 i W^2) - \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{6} \sin^4 i \left\{ -\sin \frac{1}{2} W + 1 \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} W^3 + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin \frac{1}{2} W^5 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2} W - \frac{1}{2} \sin^2 i \tan \frac{1}{2} W - \frac{1}{8} \sin^4 i \sin \frac{1}{2} W \\ &+ \frac{1}{6} \sin^4 i \sin \frac{1}{2} W^3 \left\{ 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^2 i W^2 + 5 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^2 i W^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Bekanntlich ist nun nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\frac{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{x} = \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^5 + \dots,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung differentiirt,

$$\begin{aligned} &\frac{2x^2 - 1 + \sqrt{(1 - x^2)^3}}{x^2 \sqrt{(1 - x^2)^3}} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + 5 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^4 + 7 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^6 + \dots \end{aligned}$$

Also ist, wenn man $\sin \frac{1}{2} W$ für x setzt,

$$\begin{aligned} &1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^2 \frac{1}{2} W + 5 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^4 \frac{1}{2} W + \dots \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 1 + \sqrt{(1 - \sin^2 \frac{1}{2} W^2)^3}}{\sin^2 \frac{1}{2} W^2 \sqrt{(1 - \sin^2 \frac{1}{2} W^2)^3}} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 1 + \cos \frac{1}{2} W^3}{\sin^2 \frac{1}{2} W^2 \cos \frac{1}{2} W^3} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} W^3 - (\cos \frac{1}{2} W^2 - \sin \frac{1}{2} W^2)}{\sin^2 \frac{1}{2} W^2 \cos \frac{1}{2} W^3} = \frac{\cos \frac{1}{2} W^3 - \cos W}{\sin^2 \frac{1}{2} W^2 \cos \frac{1}{2} W^3} \end{aligned}$$

Führt man dies nun in den obigen Ausdruck von $\frac{1}{2}W_I$ ein; so erhält man

$$\frac{1}{2}W_I = \frac{1}{2}W - \frac{1}{2} \sin i^2 \tan \frac{1}{2}W - \frac{1}{8} \sin i^4 \frac{\sin \frac{1}{2}W \cos W}{\cos \frac{1}{2}W^3},$$

oder

$$86. \quad W_I = W - \sin i^2 \tan \frac{1}{2}W - \frac{1}{4} \sin i^4 \frac{\cos W \tan \frac{1}{2}W}{\cos \frac{1}{2}W^2}.$$

In dieser Gleichung sind W und W_I in Theilen des Halbmessers, d. i. der Einheit ausgedrückt. Sollen W und W_I in Secunden ausgedrückt seyn; so muss man die vorhergehende Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$87. \quad W_I = W - \sin i^2 \frac{\tan \frac{1}{2}W}{\sin 1''} - \frac{1}{4} \sin i^4 \frac{\cos W \tan \frac{1}{2}W}{\cos \frac{1}{2}W^2 \sin 1''}.$$

Setzt man i für $\sin i$, welches wegen der Kleinheit des Bogens i verstattet ist; so erhält die Gleichung 86. folgende Gestalt:

$$88. \quad W_I = W - i^2 \tan \frac{1}{2}W - \frac{1}{4} i^4 \frac{\cos W \tan \frac{1}{2}W}{\cos \frac{1}{2}W^2},$$

wo W , W_I und i in Theilen des Halbmessers, d. i. der Einheit ausgedrückt sind.

Sollen dagegen die Grössen W , W_I und i in Secunden ausgedrückt seyn; so muss man auf ähnliche Art wie bei den Gleichungen 86. und 87. die vorstehende Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$89. \quad W_I = W - i^2 \sin 1'' \tan \frac{1}{2}W - \frac{1}{4} i^4 (\sin 1'')^3 \frac{\cos W \tan \frac{1}{2}W}{\cos \frac{1}{2}W^4}.$$

Geht man bloss bis auf Glieder der zweiten Ordnung; so werden die vorigen Gleichungen

$$90. \quad W_I = W - \sin i^2 \tan \frac{1}{2}W$$

oder

$$91. \quad W_I = W - i^2 \tan \frac{1}{2}W;$$

und, wenn i , W , W_I in Secunden ausgedrückt seyn sollen,

$$92. \quad W_I = W - \sin i^2 \frac{\tan \frac{1}{2}W}{\sin 1''},$$

oder

$$93. \quad W_I = W - i^2 \sin 1'' \tan \frac{1}{2}W.$$

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass man, wenn man sich der Formeln der sphärischen Trigonometrie bedienen will, mittelst der in §. 4. bewiesenen Sätze zu der Gleichung 82. auch sehr leicht auf folgende Art gelangen kann.

Nach dem Satze §. 4. IV. sind im vorliegenden Falle für jede der beiden Spiegelebenen die Projectionen des einfallenden und reflectirten Strahls auf der Sextantenebene gegen die Durchschnittslinie der entsprechenden Spiegelebene mit der Sextantenebene unter gleichen Winkeln geneigt. Hieraus leitet man durch eine höchst einfache geometrische Betrachtung auf eine ganz ähnliche Weise wie in §. 1. ab, dass, wenn W den Winkel bezeichnet, welchen die Projectionen der Visirlinie und des von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallenden Strahls auf der Sextantenebene mit einander einschliessen, dieser Winkel doppelt so gross ist wie der von den Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene eingeschlossene Winkel

$\frac{1}{2}W$, d. h. dass $W' = W$ ist. Denkt man sich nun durch den Durchschnittspunkt der beiden in Rede stehenden Projectionen Parallelen mit der Visirlinie und dem von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallenden Strahle gezogen; so ist der von diesen Parallelen eingeschlossene Winkel der Winkel W_1 , und dieselben sind nach dem Satze §. 4. II. gegen die Sextantenebene beide unter dem Winkel i geneigt. Dies vorausgesetzt, ist es nun sehr leicht, sich ein sphärisches Dreieck zu construiren, dessen drei Seiten $90^\circ - i$, $90^\circ - i$, W_1 sind, und in welchem die beiden ersten, einander gleichen Seiten den Winkel $W' = W$ einschliessen, so dass also W_1 die dem Winkel $W' = W$ gegenüberstehende Seite ist. Daher ist nach einer sehr bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos W_1 = \cos (90^\circ - i) \cos (90^\circ - i) + \sin (90^\circ - i) \sin (90^\circ - i) \cos W,$$

d. i.

$$\cos W_1 = \sin i^2 + \cos i^2 \cos W,$$

welches die Formel 82. ist.

7.

Wir nehmen jetzt ferner an, dass die Visirlinie der Ebene des Sextanten parallel sey, dass der grosse Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehe, der kleine aber mit derselben keinen rechten Winkel einschliesse. Die Ebene des Sextanten nehmen wir wieder als Ebene der xy , die Durchschnittslinie der Ebene des kleinen Spiegels mit der Ebene des Sextanten jetzt aber wie in §. 5. als Axe der x an, und bezeichnen durch i_1 den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil des kleinen Spiegels mit dem Theile der Ebene der xy einschliesst, in welchem die positiven y genommen werden.

Die Gleichung des auf der Ebene der xy senkrechten grossen Spiegels, in der Lage nämlich, bei welcher der wegen des Collimationsfehlers corrigirte Winkel W abgelesen worden ist, sey

$$94. A_1 x + B_1 y + D_1 = 0.$$

Die Gleichungen der mit der Ebene der xy parallelen Visirlinie seyen

$$95. y = ax + a, \quad z = \beta.$$

Die Gleichungen des von dem grossen Spiegel auf den kleinen Spiegel reflectirten Strahles seyen

$$96. y = a_1 x + a_1, \quad z = b_1 x + \beta_1.$$

Die Gleichungen des von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallenden Strahls seyen

$$97. y = a_2 x + a_2, \quad z = b_2 x + \beta_2.$$

Die Gleichungen 96. und 97. führen leicht zu den Gleichungen

$$98. x = \frac{1}{b_1} z - \frac{\beta_1}{b_1}, \quad y = \frac{a_1}{b_1} z + a_1 \left(\frac{a_1}{a_1} - \frac{\beta_1}{b_1} \right);$$

und

$$99. x = \frac{1}{b_2} z - \frac{\beta_2}{b_2}, \quad y = \frac{a_2}{b_2} z + a_2 \left(\frac{a_2}{a_2} - \frac{\beta_2}{b_2} \right).$$

Weil nun nach der Voraussetzung der grosse Spiegel auf der Ebene des Sextanten, d. i. auf der Ebene der xy senkrecht steht; so ist nach 67.

$$\frac{1}{b_2} = - \frac{A_1^2 - B_1^2 + 2a_1 A_1 B_1}{b_1 (A_1^2 + B_1^2)},$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 (A_1^2 - B_1^2) - 2A_1 B_1}{b_1 (A_1^2 + B_1^2)};$$

folglich

$$100. \begin{cases} a_2 = - \frac{a_1 (A_1^2 - B_1^2) - 2A_1 B_1}{A_1^2 - B_1^2 + 2a_1 A_1 B_1}, \\ b_2 = - \frac{b_1 (A_1^2 + B_1^2)}{A_1^2 - B_1^2 + 2a_1 A_1 B_1}. \end{cases}$$

Nach 56. ist aber

$$a_1 = a \cos 2i_1, \quad b_1 = a \sin 2i_1.$$

Also ist

$$101. \begin{cases} a_2 = - \frac{a (A_1^2 - B_1^2) \cos 2i_1 - 2A_1 B_1}{A_1^2 - B_1^2 + 2a A_1 B_1 \cos 2i_1}, \\ b_2 = - \frac{a (A_1^2 + B_1^2) \sin 2i_1}{A_1^2 - B_1^2 + 2a A_1 B_1 \cos 2i_1}. \end{cases}$$

Nach den bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist wegen der Gleichungen 95. und 97.

$$102. \cos W_1 = \pm \frac{1 + aa_2}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a_2^2 + b_2^2)}}.$$

Weil ferner der grosse Spiegel auf der Ebene der xy senkrecht ist; so ist nach den Gleichungen 98., 99. und 32.

$$\frac{1 + a_1^2 + b_1^2}{b_1^2} = \frac{1 + a_2^2 + b_2^2}{b_2^2}.$$

Aber

$$1 + a_1^2 + b_1^2 = 1 + a^2 (\cos^2 2i_1 + \sin^2 2i_1) = 1 + a^2.$$

Also

$$1 + a_2^2 + b_2^2 = \frac{b_2^2}{b_1^2} (1 + a^2),$$

und folglich nach 102.

$$103. \cos W_1 = \pm \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{1 + aa_2}{1 + a^2},$$

oder

$$104. \cos W_1 = \pm \frac{a \sin 2i_1}{1 + a^2} \cdot \frac{1 + aa_2}{b_2}.$$

Nach 101. ist nun

$$\frac{1 + aa_2}{b_2} = - \frac{(A_1^2 - B_1^2)(1 - a^2 \cos 2i_1) + 2a A_1 B_1 (1 + \cos 2i_1)}{a (A_1^2 + B_1^2) \sin 2i_1};$$

also nach 104.

$$105. \cos W_1 = \mp \frac{(A_1^2 - B_1^2)(1 - a^2 \cos 2i_1) + 2a A_1 B_1 (1 + \cos 2i_1)}{(1 + a^2)(A_1^2 + B_1^2)}$$

Die Gleichung der Durchschnittslinie der Ebene des grossen Spiegels mit der Ebene der xy ist

$$A_1 x + B_1 y + D_1 = 0,$$

oder

$$y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{D_1}{B_1}.$$

Die Durchschnittslinie der Ebene des kleinen Spiegels mit der Ebene der xy ist nach der Voraussetzung die Axe der x . Also ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\tan \frac{1}{2} W^2 = \frac{A_1^2}{B_1^2},$$

und folglich

$$\sec \frac{1}{2} W^2 = \frac{A_1^2 + B_1^2}{B_1^2}, \quad \cos \frac{1}{2} W^2 = \frac{B_1^2}{A_1^2 + B_1^2}, \quad \sin \frac{1}{2} W^2 = \frac{A_1^2}{A_1^2 + B_1^2};$$

also

$$106. \quad \cos W = -\frac{A_1^2 - B_1^2}{A_1^2 + B_1^2}, \quad \sin W = \frac{4 A_1^2 B_1^2}{(A_1^2 + B_1^2)^2}.$$

Man nehme nun, was offenbar verstattet ist, den Anfang der Coordinaten im kleinen Spiegel an, den positiven Theil der Axe der x nach dem Limbus des Instruments, den positiven Theil der Axe der y nach dem grossen Spiegel hin, die positiven z aber auf der Seite der Sextantenebene, auf welcher die beiden Spiegel liegen; so ist nach der Theorie der geraden Linie in der Ebene allgemein

$$\tan (180^\circ - \frac{1}{2} W) = -\frac{A_1}{B_1},$$

und folglich

$$\tan \frac{1}{2} W = \frac{A_1}{B_1}.$$

Also haben, weil, wie aus der Einrichtung des Instruments hervorgeht, $\frac{1}{2} W$ immer ein spitzer Winkel ist, A_1 und B_1 gleiche Vorzeichen, und das Product $A_1 B_1$ ist folglich positiv. Weil nun auch $\sin W$ offenbar jederzeit positiv ist; so ist nach 106.

$$107. \quad \cos W = -\frac{A_1^2 - B_1^2}{A_1^2 + B_1^2}, \quad \sin W = \frac{2 A_1 B_1}{A_1^2 + B_1^2}.$$

Denkt man sich nun Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung 105. durch $A_1^2 + B_1^2$ dividirt; so erhält man in Verbindung mit 107. auf der Stelle die Gleichung

$$108. \quad \cos W_1 = \mp \frac{a(1 + \cos 2i_1) \sin W - (1 - a^2 \cos 2i_1) \cos W}{1 + a^2},$$

wo sich nun wieder fragt, ob man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, welches sich auf folgende Art leicht entscheiden lässt. Für $i_1 = 90^\circ$, $2i_1 = 180^\circ$ muss $W_1 = W$, also auch $\cos W_1 = \cos W$ werden. Setzt man aber in der vorhergehenden Gleichung $i_1 = 90^\circ$; so erhält man

$$\cos W_1 = \pm \cos W,$$

und sieht also, dass man das obere Zeichen nehmen, d. h.

$$109. \quad \cos W_1 = \frac{(1 - a^2 \cos 2i_1) \cos W - a(1 + \cos 2i_1) \sin W}{1 + a^2}$$

setzen muss.

Bezeichnet nun θ den Neigungswinkel der Visirlinie gegen eine auf der Ebene des Sextanten und auf der Durchschnittslinie der Ebene des kleinen Spiegels mit der Ebene der Sextanten senkrechte Ebene; so ist nach 58.

$$\sin \theta^2 = \frac{1}{1+a^2}, \quad \cos \theta^2 = \frac{a^2}{1+a^2};$$

folglich

$$110. \quad a^2 = \cot \theta^2, \quad 1 + a^2 = \frac{1}{\sin \theta^2}.$$

Da nach der Voraussetzung

$$y = ax + a$$

die Gleichung der Projection der Visirlinie auf der Ebene der xy ist; so ist, wenn wir den von dem, auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theile dieser Projection mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch ω bezeichnen, nach den Principien der analytischen Geometrie $\tan \omega = a$, und folglich, weil bei allen Sextanten ω ein spitzer Winkel ist, a positiv. Da nun auch θ ein spitzer Winkel ist; so ist nach 110.

$$111. \quad a = \cot \theta, \quad 1 + a^2 = \frac{1}{\sin \theta^2},$$

und folglich nach 109.

$$112. \quad \cos W_1 = \sin \theta^2 \{ (1 - \cot \theta^2 \cos 2i_1) \cos W - \cot \theta (1 + \cos 2i_1) \sin W \},$$

oder

$$\cos W_1 = (\sin \theta^2 - \cos \theta^2 \cos 2i_1) \cos W - \sin \theta \cos \theta (1 + \cos 2i_1) \sin W,$$

oder, wie man leicht findet,

$$\cos W_1 = \sin \theta \sin(\theta - W) - \cos \theta \cos 2i_1 \cos(\theta - W).$$

Setzt man nun

$$\cos 2i_1 = 2 \cos i_1^2 - 1;$$

so erhält man nach leichter Rechnung

$$113. \quad \cos W_1 = \cos W - 2 \cos i_1^2 \cos \theta \cos(W - \theta).$$

Dem angenommenen Coordinatensysteme und den oben gegebenen Bestimmungen gemäss ist i_1 der Winkel, welchen die Ebene des kleinen Spiegels mit der Sextantenebene nach der Seite des grossen Spiegels hin einschliesst. Da aber in der Formel 113. nur das Quadrat von $\cos i_1$ vorkommt; so kann man für i_1 auch immer den spitzen Neigungswinkel der Ebene des kleinen Spiegels gegen die Sextantenebene setzen.

Eine Näherungsformel kann man, wenn i_1 von $\frac{1}{2}\pi$ nur sehr wenig verschieden ist, leicht auf folgende Art entwickeln. Nach 113. ist

$$\sin \frac{1}{2}(W + W_1) \sin \frac{1}{2}(W - W_1) = - \cos i_1^2 \cos \theta \cos(W - \theta).$$

Weil nun

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(W + W_1) \sin \frac{1}{2}(W - W_1) &= \sin(W - \frac{1}{2}(W - W_1)) \sin \frac{1}{2}(W - W_1) \\ &= \frac{1}{2} \sin W \sin(W - W_1) - \cos W \sin \frac{1}{2}(W - W_1)^2 \end{aligned}$$

ist; so ist, wenn wir $i_1 = \frac{1}{2}\pi - y$, folglich $\cos i_1 = \sin y$ setzen,

$$= 2 \cos W \sin \frac{1}{2}(W - W_1)^2 - 2 \sin y^2 \cos \theta \cos(W - \theta),$$

oder näherungsweise

$$(W - W_1) \sin W = \frac{1}{2}(W - W_1)^2 \cos W - 2y^2 \cos \theta \cos(W - \theta);$$

oder

oder

$$W - W_1 = \frac{1}{2}(W - W_1)^2 \cot W - \frac{2y^2 \cos \theta \cos(W - \theta)}{\sin W}.$$

Hieraus erhellet, dass $W - W_1$ von der zweiten Ordnung, und daher offenbar bis auf Grössen der zweiten Ordnung genau

$$W - W_1 = - \frac{2y^2 \cos \theta \cos(W - \theta)}{\sin W},$$

d. i.

$$114. \quad W_1 = W + \frac{2y^2 \cos \theta \cos(W - \theta)}{\sin W},$$

oder, wenn y , W , W_1 in Secunden ausgedrückt seyn sollen,

$$115. \quad W_1 = W + \frac{2y^2 \sin 1'' \cos \theta \cos(W - \theta)}{\sin W}$$

ist.

8.

Endlich wollen wir nun annehmen, dass die Visirlinie der Ebene des Sextanten parallel sey, dass der kleine Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehe, der grosse Spiegel aber mit derselben keinen rechten Winkel einschliesse. Die Ebene des Sextanten nehmen wir als Ebene der xy , die Durchschnittslinie der Ebene des grossen Spiegels in der Lage, bei welcher der wegen des Collimationsfehlers verbesserte Winkel W abgelesen worden ist, mit der Ebene des Sextanten als Axe der x an, und bezeichnen durch i_2 den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil des grossen Spiegels mit dem Theile der Ebene der xy einschliesst, in welchem die positiven y genommen werden.

Die Gleichung des auf der Ebene der xy senkrecht stehenden kleinen Spiegels sey

$$116. \quad Ax + By + D = 0.$$

Die Gleichungen der mit der Ebene der xy parallelen Visirlinie seyen

$$117. \quad y = ax + a, \quad z = \beta.$$

Die Gleichungen des zwischen dem kleinen und grossen Spiegel liegenden Strahls, welcher im vorliegenden Falle, wo der kleine Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht und die Visirlinie dieser Ebene parallel ist, der Ebene des Sextanten offenbar ebenfalls parallel ist, überdies auch den kleinen Spiegel in demselben Punkte wie die Visirlinie schneidet, seyen

$$118. \quad y = a_1x + a_1, \quad z = \beta.$$

Die Gleichungen des von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallenden Strahls seyen

$$119. \quad y = a_2x + a_2, \quad z = b_2x + \beta_2.$$

Ist V der Winkel, unter welchem die Visirlinie gegen die Ebene des kleinen Spiegels geneigt ist; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$\tan V^2 = \left(\frac{A + aB}{B - aA} \right)^2.$$

Weil aber unter demselben Winkel auch der zwischen dem grossen und kleinen Spiegel liegende Strahl gegen die Ebene des kleinen Spiegels geneigt ist; so ist auch

$$\tan V^2 = \left(\frac{A + a_1 B}{B - a_1 A} \right)^2,$$

und folglich

$$120. \quad \frac{A + a_1 B}{B - a_1 A} = \pm \frac{A + aB}{B - aA}.$$

Nähme man in dieser Gleichung das obere Zeichen; so erhielte man aus derselben $a = a_1$. Weil nun, wenn XYZ der Punkt ist, in welchem die Visirlinie und der zwischen beiden Spiegeln liegende Strahl den kleinen Spiegel schneiden, nach 117. und 118.

$$Y = aX + a, \quad Y = a_1 X + a_1$$

ist; so würde, wenn $a = a_1$ wäre, offenbar $a = a_1$, und die Gleichungen 117. und 118. der Visirlinie und des zwischen beiden Spiegeln liegenden Strahls würde also identisch seyn, welches offenbar ungereimt ist. Daher muss man in der Gleichung 120. das untere Zeichen nehmen, und also

$$121. \quad \frac{A + a_1 B}{B - a_1 A} = - \frac{A + aB}{B - aA}$$

setzen. Bestimmt man aus dieser Gleichung die Grösse a_1 ; so erhält man

$$122. \quad a_1 = \frac{2AB - a(A^2 - B^2)}{A^2 - B^2 + 2aAB}.$$

Weil der zwischen beiden Spiegeln liegende Strahl der Ebene des Sextanten, d. i. der Ebene der xy parallel ist; so ist nach 56.

$$a_2 = a_1 \cos 2i_2, \quad b_2 = a_1 \sin 2i_2,$$

und folglich nach 122.

$$123. \quad \begin{cases} a_2 = \frac{2AB - a(A^2 - B^2)}{A^2 - B^2 + 2aAB} \cos 2i_2, \\ b_2 = \frac{2AB - a(A^2 - B^2)}{A^2 - B^2 + 2aAB} \sin 2i_2. \end{cases}$$

Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist nun

$$124. \quad \cos W_1 = \pm \frac{1 + aa_2}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a_2^2 + b_2^2)}}.$$

Aber

$$1 + a_2^2 + b_2^2 = 1 + a_1^2 (\cos^2 2i_2 + \sin^2 2i_2) = 1 + a_1^2,$$

und folglich nach 122., wie man leicht findet,

$$125. \quad 1 + a_2^2 + b_2^2 = \frac{(1 + a^2)(A^2 + B^2)^2}{(A^2 - B^2 + 2aAB)^2};$$

also

$$126. \quad (1 + a^2)(1 + a_2^2 + b_2^2) = \frac{(1 + a^2)^2 (A^2 + B^2)^2}{(A^2 - B^2 + 2aAB)^2}.$$

Ferner ist nach 123.

$$127. \quad 1 + aa_2 = \frac{(A^2 - B^2)(1 - a^2 \cos 2i_2) + 2aAB(1 + \cos 2i_2)}{A^2 - B^2 + 2aAB}.$$

Also ist nach 124., 126. und 127.

$$128. \quad \cos W_1 = \pm \frac{(A^2 - B^2)(1 - a^2 \cos 2i_2) + 2aAB(1 + \cos 2i_2)}{(1 + a^2)(A^2 + B^2)}.$$

Die Gleichung der Durchschnittslinie der Ebene des kleinen Spiegels mit der Ebene der xy ist

$$Ax + By + D = 0$$

oder

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}.$$

Die Durchschnittslinie der Ebene des grossen Spiegels mit der Ebene der xy ist nach der Voraussetzung die Axe der x . Also ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$\tan \frac{1}{2} W^2 = \frac{A^2}{B^2},$$

und folglich

$$\sec \frac{1}{2} W^2 = \frac{A^2 + B^2}{B^2}, \quad \cos \frac{1}{2} W^2 = \frac{B^2}{A^2 + B^2}, \quad \sin \frac{1}{2} W^2 = \frac{A^2}{A^2 + B^2};$$

also

$$129. \quad \cos W = -\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \quad \sin W = \frac{4A^2 B^2}{(A^2 + B^2)^2}.$$

Man nehme nun, was offenbar verstattet ist, den Anfang der Coordinaten im grossen Spiegel an, und den positiven Theil der Axe der x nach dem Limbus des Instruments, den positiven Theil der Axe der y nach dem kleinen Spiegel hin, die positiven z aber auf der Seite der Sextantenebene, auf welcher die beiden Spiegel liegen; so ist nach der Theorie der geraden Linie in der Ebene allgemein

$$\tan(180^\circ - \frac{1}{2} W) = -\frac{A}{B},$$

und folglich

$$\tan \frac{1}{2} W = \frac{A}{B}.$$

Also haben, weil, wie aus der Einrichtung des Instruments von selbst hervorgeht, $\frac{1}{2} W$ immer ein spitzer Winkel ist, A und B gleiche Vorzeichen, und das Product AB ist folglich positiv. Weil nun auch $\sin W$ offenbar immer positiv ist; so ist nach 129.

$$130. \quad \cos W = -\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \quad \sin W = \frac{2AB}{A^2 + B^2}.$$

Denkt man sich nun Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung 128. durch $A^2 + B^2$ dividirt; so erhält man in Verbindung mit 130. auf der Stelle die Gleichung

$$131. \quad \cos W_1 = \pm \frac{a(1 + \cos 2i_2) \sin W - (1 - a^2 \cos 2i_2) \cos W}{1 + a^2}.$$

Für $i_2 = 90^\circ$ erhält man hieraus

$$\cos W_1 = \mp \cos W,$$

und muss also, weil beim Sextanten, wenn $i_2 = 90^\circ$ ist, $\cos W_1 = \cos W$ ist, in der Gleichung 131. das untere Zeichen nehmen, d. h. man muss

$$132. \quad \cos W_1 = - \frac{a(1 + \cos 2i_2) \sin W - (1 - a^2 \cos 2i_2) \cos W}{1 + a^2}$$

setzen.

Ist nun in Fig. 13. KL die Durchschnittslinie des kleinen Spiegels, MN die Durchschnittslinie des grossen Spiegels mit der Ebene des Sextanten, FG die Projection der Visirlinie auf dieser Ebene, und GH in derselben auf KL senkrecht; so ist offenbar

$$\frac{1}{2}W + \omega + 90^\circ - \theta = 180^\circ,$$

d. i.

$$\omega = 90^\circ - (\frac{1}{2}W - \theta).$$

Nach der Theorie der geraden Linie in der Ebene ist aber

$$a = \tan \omega,$$

und folglich nach dem Vörhergehenden

$$133. \quad a = \cot(\frac{1}{2}W - \theta), \quad 1 + a^2 = \operatorname{cosec}(\frac{1}{2}W - \theta)^2.$$

Also ist nach 132.

$$\sin(\frac{1}{2}W - \theta)^2 \{ [1 - \cos 2i_2 \cot(\frac{1}{2}W - \theta)^2] \cos W - (1 + \cos 2i_2) \cot(\frac{1}{2}W - \theta) \sin W \}$$

oder

$$\cos W_1 = \{ \sin(\frac{1}{2}W - \theta)^2 - \cos 2i_2 \cos(\frac{1}{2}W - \theta)^2 \} \cos W - (1 + \cos 2i_2) \sin(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \sin W,$$

oder, wie man leicht findet,

$$- \sin(\frac{1}{2}W - \theta) \sin(\frac{1}{2}W + \theta) - \cos 2i_2 \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W + \theta).$$

Setzt man nun

$$\cos 2i_2 = 2 \cos i_2^2 - 1;$$

so erhält man nach leichter Rechnung

$$134. \quad \cos W_1 = \cos W - 2 \cos i_2^2 \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W + \theta).$$

Dem angenommenen Coordinatensysteme und den oben gegebenen Bestimmungen gemäss ist i_2 der Winkel, welchen die Ebene des grossen Spiegels mit der Sextantenebene nach der Seite des kleinen Spiegels hin einschliesst. Weil aber in der Formel 134. bloss das Quadrat von $\cos i_2$ vorkommt; so kann man für i_2 auch immer den spitzen Neigungswinkel der Ebene des grossen Spiegels gegen die Sextantenebene setzen.

Ist i_2 nur sehr wenig von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden; so erhält man, $i_2 = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ setzend, auf ganz ähnliche Art wie in §. 7. die bis auf Grössen der zweiten Ordnung genaue Näherungsformel

$$135. \quad W_1 = W + \frac{2\varepsilon^2 \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W + \theta)}{\sin W},$$

welche man, wenn ε , W , W_1 in Secunden ausgedrückt seyn sollen, unter der Form

$$136. \quad W_1 = W + \frac{2\varepsilon^2 \sin 1'' \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W + \theta)}{\sin W}$$

schreiben muss.

9.

Für den Fall, wenn der Sextant ausser mit dem Collimationsfehler auch noch mit allen drei übrigen Fehlern zugleich behaftet ist, wollen wir nun nach einer von der bei der vorhergehenden Untersuchung angewandten verschiedenen Methode, welche uns vorzüglich wegen der bei ihr angewandten Coordinatenverwandlung bemerkenswerth zu seyn scheint, eine ganz allgemeine Formel entwickeln. Bei dieser Untersuchung nehmen wir die Ebene des Sextanten als Ebene der xy , die Durchschnittslinie des kleinen Spiegels mit der Sextantenebene als Axe der x an. Die positiven x sollen, wo auch in der Axe der x der Anfang der Coordinaten liegen mag, immer nach der Seite des Limbus, die positiven y nach der Seite des grossen Spiegels hin, die positiven z auf der Seite der Sextantenebene oder der Ebene der xy , auf welcher die beiden Spiegel liegen, genommen werden.

Bezeichnet nun i_1 den von dem kleinen Spiegel mit der Sextantenebene nach der Seite des grossen Spiegels hin eingeschlossenen Winkel; so ist nach 35.

$$137. -y \operatorname{tang} i_1 + z = 0$$

die Gleichung des kleinen Spiegels.

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung 1.; so erhalten wir

$$A = 0, \quad B = -\operatorname{tang} i_1, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

Sind nun

$$138. x = \alpha z + \alpha, \quad y = \beta z + \beta$$

die Gleichungen der Visirlinie, dagegen

$$139. x = \alpha_1 z + \alpha_1, \quad y = \beta_1 z + \beta_1$$

die Gleichungen des zwischen beiden Spiegelebenen liegenden Strahls; so hat man nach 27. die beiden Gleichungen

$$140. \begin{cases} -(a - \alpha_1) \operatorname{tang} i_1 - (\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta) = 0, \\ (1 + a^2 + b^2)(1 - \beta_1 \operatorname{tang} i_1)^2 - (1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2)(1 - b \operatorname{tang} i_1)^2 = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$141. \operatorname{tang} i_1 = -\frac{\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta}{a - \alpha_1},$$

und folglich

$$142. \begin{cases} 1 - b \operatorname{tang} i_1 = \frac{a(1 + \beta \beta_1) - \alpha_1(1 + b^2)}{a - \alpha_1}, \\ 1 - \beta_1 \operatorname{tang} i_1 = \frac{a(1 + b_1^2) - \alpha_1(1 + \beta \beta_1)}{a - \alpha_1}; \end{cases}$$

also

$$143. \frac{1 - b \operatorname{tang} i_1}{1 - \beta_1 \operatorname{tang} i_1} = -\frac{a(1 + \beta \beta_1) - \alpha_1(1 + b^2)}{a_1(1 + \beta \beta_1) - a(1 + b_1^2)},$$

und folglich, weil nach der zweiten der beiden Gleichungen 140.

$$\frac{1 + a^2 + b^2}{1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2} = \left(\frac{1 - b \operatorname{tang} i_1}{1 - \beta_1 \operatorname{tang} i_1} \right)^2$$

ist

$$144. \frac{1+a^2+b^2}{1+a_1^2+b_1^2} = \frac{a^2(1+bb_1)^2 - 2aa_1(1+b^2)(1+bb_1) + a_1^2(1+b^2)^2}{a_1^2(1+bb_1)^2 - 2aa_1(1+b_1^2)(1+bb_1) + a^2(1+b_1^2)^2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$0 = \begin{aligned} & \{a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2)\}(1+bb_1)^2 \\ & - 2aa_1\{(1+a_1^2+b_1^2)(1+b^2) - (1+a^2+b^2)(1+b_1^2)\}(1+bb_1) \\ & - \{a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2)\}(1+b^2)(1+b_1^2) \\ & - \{a^4(1+b_1^2)^2 - a_1^4(1+b^2)^2\}, \end{aligned}$$

oder

$$0 = \begin{aligned} & \{a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2)\}(1+bb_1)^2 \\ & + 2aa_1\{a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2)\}(1+bb_1) \\ & - \{a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2)\}(1+b^2)(1+b_1^2) \\ & - \{a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2)\}\{a^2(1+b_1^2) + a_1^2(1+b^2)\}; \end{aligned}$$

also, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$145. 0 = \{a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2)\}\{(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (ab_1-a_1b)^2\}.$$

Folglich ist entweder

$$a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2) = 0,$$

oder

$$(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (ab_1-a_1b)^2 = 0.$$

Dass letztere Gleichung nicht Statt finden kann, zeigt man ganz auf dieselbe Art, wie in §. 4. bei einem ähnlichen Falle. Daher ist

$$a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2) = 0,$$

und wir haben also jetzt zwischen den Grössen a, b, a_1, b_1 die beiden folgenden Gleichungen:

$$146. \begin{cases} a^2(1+b_1^2) - a_1^2(1+b^2) = 0, \\ -(a-a_1) \operatorname{tangi}_1 - (ab_1-a_1b) = 0. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$147. b_1 = - \frac{a \operatorname{tangi}_1 - a_1(b + \operatorname{tangi}_1)}{a}.$$

Führt man diesen Ausdruck von b_1 in die erste der beiden Gleichungen 146. ein; so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$a_1^2 + \frac{2a(b + \operatorname{tangi}_1) \operatorname{tangi}_1}{1 - 2b \operatorname{tangi}_1 - \operatorname{tangi}_1^2} a_1 = \frac{a^2 \sec^2 i_1}{1 - 2b \operatorname{tangi}_1 - \operatorname{tangi}_1^2}.$$

Entwickelt man nun a_1 aus dieser Gleichung; so erhält man nach einigen ganz leichten Verwandlungen:

$$a_1 = \frac{-a(b + \operatorname{tangi}_1) \operatorname{tangi}_1 \pm a \sec i_1 (\cos i_1 - b \sin i_1)}{1 - 2b \operatorname{tangi}_1 - \operatorname{tangi}_1^2},$$

wo nun zunächst die Frage entsteht, welches Zeichen man zu nehmen hat. Nähme man das obere Zeichen; so erhielte man $a_1 = a$, und nach 146. folglich auch $b_1 = b$. Da die beiden Linien, deren Gleichungen die Gleichungen 138. und 139. sind, durch einen und denselben Punkt des kleinen Spiegels gehen; so ist, wenn wir die Coordinaten dieses Punktes durch X, Y, Z bezeichnen,

$$X = aZ + \alpha, \quad Y = bZ + \beta;$$

$$X = a_1 Z + \alpha_1, \quad Y = b_1 Z + \beta_1;$$

und es wäre also, wenn $a=a_1$, $b=b_1$ wäre, offenbar auch $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$. Nähme man also in dem obigen Ausdrucke von a_1 das obere Zeichen; so würden die beiden in Rede stehenden Linien zusammenfallen, welches offenbar ungereimt ist. Daher muss man

$$a_1 = \frac{-a(b + \operatorname{tang} i_1) \operatorname{tang} i_1 - a \sec i_1 (\cos i_1 - b \sin i_1)}{1 - 2b \operatorname{tang} i_1 - \operatorname{tang} i_1^2}$$

setzen, woraus man leicht

$$148. \quad a_1 = - \frac{a \sec i_1^2}{1 - 2b \operatorname{tang} i_1 - \operatorname{tang} i_1^2},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit $\cos i_1^2$ multiplicirt,

$$149. \quad a_1 = - \frac{a}{\cos 2i_1 - b \sin 2i_1}$$

erhält. Führt man den Ausdruck 149. für a_1 in die Gleichung 147. ein; so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen

$$150. \quad b_1 = - \frac{\sin 2i_1 + b \cos 2i_1}{\cos 2i_1 - b \sin 2i_1}$$

Aus 149. und 150. ergibt sich auch leicht

$$151. \quad \frac{1 + a^2 + b^2}{1 + a_1^2 + b_1^2} = (\cos 2i_1 - b \sin 2i_1)^2.$$

Wir wollen nun das Coordinatensystem verändern. Es soll nämlich jetzt die Durchschnittslinie des grossen Spiegels in der Lage, bei welcher der wegen des Collimationsfehlers verbesserte Winkel W abgelesen worden ist, mit der Sextantenebene, die wir als Ebene der xy beibehalten, als Axe der x angenommen werden. Den Durchschnittspunkt der Axen der primitiven und secundären x nehmen wir als Anfang der Coordinaten an, und bezeichnen den Winkel, welchen der grosse Spiegel mit der Sextantenebene, d. i. mit der Ebene der xy , nach der Seite des kleinen Spiegels hin einschliesst, durch i_2 .

Aus der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten erhellet nun leicht, dass man, um von dem primitiven Systeme zu dem secundären überzugehen, für x , y , z respective

$$x \cos \frac{1}{2} W + y \sin \frac{1}{2} W, \quad -x \sin \frac{1}{2} W + y \cos \frac{1}{2} W, \quad z$$

setzen muss.

Also sind nach 138. die Gleichungen der Visirlinie in Bezug auf das secundäre System

$$\begin{aligned} x \cos \frac{1}{2} W + y \sin \frac{1}{2} W &= ax + \alpha, \\ -x \sin \frac{1}{2} W + y \cos \frac{1}{2} W &= bx + \beta; \end{aligned}$$

d. i.

$$152. \quad \begin{cases} x = (a \cos \frac{1}{2} W - b \sin \frac{1}{2} W) z + \alpha', \\ y = (a \sin \frac{1}{2} W + b \cos \frac{1}{2} W) z + \beta'; \end{cases}$$

wo es auf die Werthe von α' und β' jetzt weiter nicht ankommt.

Ganz eben so sind nach 139. die Gleichungen des zwischen den beiden Spiegelebenen liegenden Strahls in Bezug auf das neue System

$$153. \begin{cases} x = (a_1 \cos \frac{1}{2} W^* - b_1 \sin \frac{1}{2} W^*) x + a'_1, \\ y = (a_1 \sin \frac{1}{2} W^* + b_1 \cos \frac{1}{2} W^*) x + \beta'_1; \end{cases}$$

wo es auf die Werthe von a'_1 und β'_1 jetzt wieder weiter nicht ankommt.

Führen wir in diese Gleichungen des zwischen den beiden Spiegeln liegenden Strahls die Werthe von a_1 und b_1 aus 149. und 150. ein; so werden diese Gleichungen

$$154. \begin{cases} x = - \frac{a \cos \frac{1}{2} W^* - (\sin 2i_1 + b \cos 2i_1) \sin \frac{1}{2} W^*}{\cos 2i_1 - b \sin 2i_1} x + a'_1, \\ y = - \frac{a \sin \frac{1}{2} W^* + (\sin 2i_1 + b \cos 2i_1) \cos \frac{1}{2} W^*}{\cos 2i_1 - b \sin 2i_1} x + \beta'_1; \end{cases}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen die Coefficienten von x in diesen beiden Gleichungen oder den Gleichungen 153. durch a_2 und b_2 bezeichnen,

$$155. x = a_2 x + a'_1, y = b_2 x + \beta'_1.$$

Die Gleichungen des von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallenden Strahls in Bezug auf das secundäre System seyen

$$156. x = a_3 x + a_3, y = b_3 x + \beta_3;$$

so ist nach 149. und 150., weil $180^\circ - i_2$ der Winkel ist, welchen der grosse Spiegel mit der Sextantenebene nach der Seite der positiven y hin einschliesst,

$$157. a_3 = - \frac{a_2}{\cos 2i_2 + b_2 \sin 2i_2}, b_3 = \frac{\sin 2i_2 - b_2 \cos 2i_2}{\cos 2i_2 + b_2 \sin 2i_2}.$$

Also ist

$$158. 1 + a_3^2 + b_3^2 = \frac{1 + a_2^2 + b_2^2}{(\cos 2i_2 + b_2 \sin 2i_2)^2}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$a_2 = a_1 \cos \frac{1}{2} W^* - b_1 \sin \frac{1}{2} W^*, b_2 = a_1 \sin \frac{1}{2} W^* + b_1 \cos \frac{1}{2} W^*$$

ist; so ist

$$1 + a_2^2 + b_2^2 = 1 + a_1^2 + b_1^2,$$

und folglich nach 151.

$$1 + a_2^2 + b_2^2 = \frac{1 + a^2 + b^2}{(\cos 2i_1 - b \sin 2i_1)^2}.$$

Also ist nach 158.

$$159. 1 + a_3^2 + b_3^2 = \frac{1 + a^2 + b^2}{(\cos 2i_1 - b \sin 2i_1)^2 (\cos 2i_2 + b_2 \sin 2i_2)^2}.$$

Wegen der Gleichungen 152. und 156. ist nun nach Principien der analytischen Geometrie

$$160. \cos W_1 = \pm \frac{1 + (a \cos \frac{1}{2} W^* - b \sin \frac{1}{2} W^*) a_3 + (a \sin \frac{1}{2} W^* + b \cos \frac{1}{2} W^*) b_3}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2) (1 + a_3^2 + b_3^2)}},$$

und folglich nach 159.

$$161. \frac{\cos W_1}{(\cos 2i_1 - b \sin 2i_1)(\cos 2i_2 + b_2 \sin 2i_2)} = \pm \frac{1 + (a \cos \frac{1}{2} W^* - b \sin \frac{1}{2} W^*) a_3 + (a \sin \frac{1}{2} W^* + b \cos \frac{1}{2} W^*) b_3}{1 + a^2 + b^2}.$$

Kehren

Kehren wir nun wieder zu dem ersten Coordinatensysteme zurück. Die Gleichungen der Visirlinie in Bezug auf dieses System sind nach 138.

$$x = ax + a, \quad y = bx + \beta.$$

Also ist die Gleichung der Projection der Visirlinie auf der Ebene der xy

$$y - \beta = \frac{b}{a} (x - a).$$

Der spitze Winkel, welchen die Projection der Visirlinie auf der Ebene der xy mit der Axe der y , d. h. mit einem auf die Durchschnittslinie des kleinen Spiegels mit der Sextantenebene in letzterer errichteten Perpendikel, einschliesst, sey θ ; so ist nach der Theorie der geraden Linie in der Ebene

$$162. \cot \theta = \frac{b}{a}, \quad b = a \cot \theta,$$

woraus sogleich erhellet, dass a und b immer gleiche Vorzeichen haben.

Schneidet die Verlängerung der Visirlinie über das Ocularende des Fernrohrs hinaus die Sextantenebene; so soll i den spitzen von der Visirlinie mit der Sextantenebene eingeschlossenen Winkel bezeichnen. Schneidet dagegen die Verlängerung der Visirlinie über das Objectivende des Fernrohrs hinaus die Sextantenebene; so soll i den stumpfen von der Visirlinie mit der Sextantenebene eingeschlossenen Winkel bezeichnen.

Nach Principien der analytischen Geometrie ist nun immer

$$\sin i^2 = \frac{1}{1 + a^2 + b^2}, \quad \cos i^2 = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2 + b^2}.$$

Also ist nach 162.

$$\sin i^2 = \frac{1}{1 + a^2 + a^2 \cot^2 \theta} = \frac{1}{1 + a^2 \operatorname{cosec}^2 \theta},$$

und folglich, wie man hieraus und aus 162. leicht findet,

$$a^2 = \cot i^2 \sin^2 \theta, \quad b^2 = \cot i^2 \cos^2 \theta.$$

Weil nun a und b nach dem Vorhergehenden gleiche Vorzeichen haben, und $\sin \theta$ und $\cos \theta$ positive Grössen sind; so ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$163. a = \pm \cot i \sin \theta, \quad b = \pm \cot i \cos \theta.$$

Die Gleichung der Projection der Visirlinie auf der Ebene der xz ist

$$z = \frac{1}{a} x - \frac{a}{a}.$$

Der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Winkel, welchen diese Projection mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, sey ω ; so ist nach der Theorie der geraden Linie in der Ebene

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{1}{a}.$$

Nun erhellet aber leicht, dass in dem Falle, wo die Verlängerung der Visirlinie über das Ocularende des Fernrohrs hinaus die Sextantenebene schneidet, ω jederzeit ein stumpfer Winkel, also a negativ; in dem Falle dagegen, wo die Verlängerung der Visirlinie über das Objectivende des Fernrohrs hinaus die Sextantenebene schneidet, ω

ein spitzer Winkel, folglich α positiv ist. Weil nun im ersten Falle i ein spitzer, im zweiten dagegen ein stumpfer Winkel ist; so ist klar, dass man in den Gleichungen 163. die untern Zeichen nehmen, und folglich

164. $a = -\cot i \sin \theta$, $b = -\cot i \cos \theta$
setzen muss.

Also ist

$$\begin{aligned} a \cos \frac{1}{2} W^* - b \sin \frac{1}{2} W^* &= \cot i \sin (\frac{1}{2} W^* - \theta), \\ a \sin \frac{1}{2} W^* + b \cos \frac{1}{2} W^* &= -\cot i \cos (\frac{1}{2} W^* - \theta); \end{aligned}$$

folglich nach 161.

$$\begin{aligned} 165. \quad & \frac{\cos W^*_1}{(\cos 2i_1 - b \sin 2i_1)(\cos 2i_2 + b_2 \sin 2i_2)} \\ &= \pm \frac{1 + a_3 \cot i \sin (\frac{1}{2} W^* - \theta) - b_3 \cot i \cos (\frac{1}{2} W^* - \theta)}{1 + a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Nach dem Obigen ist, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\cot i \sin \theta \cos \frac{1}{2} W^* + (\sin 2i_1 - \cot i \cos \theta \cos 2i_1) \sin \frac{1}{2} W^*}{\cos 2i_1 + \cot i \cos \theta \sin 2i_1}, \\ b_2 &= \frac{\cot i \sin \theta \sin \frac{1}{2} W^* - (\sin 2i_1 - \cot i \cos \theta \cos 2i_1) \cos \frac{1}{2} W^*}{\cos 2i_1 + \cot i \cos \theta \sin 2i_1}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun ferner, dass

$$a_3 = -\frac{a_2}{\cos 2i_2 + b_2 \sin 2i_2}, \quad b_3 = \frac{\sin 2i_2 - b_2 \cos 2i_2}{\cos 2i_2 + b_2 \sin 2i_2}$$

und

$$\sin i^2 = \frac{1}{1 + a^2 + b^2}$$

ist; so erhält man nach gehöriger Substitution mittelst der Gleichung 163. ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} & \pm \cos W^*_1 = \\ & \sin i^2 (\cos 2i_1 \cos 2i_2 - \sin 2i_1 \sin 2i_2 \cos \frac{1}{2} W^*) \\ & + \sin i \cos i \cos \theta (\sin 2i_1 \cos 2i_2 + \cos 2i_1 \sin 2i_2 \cos \frac{1}{2} W^*) \\ & + \sin i \cos i \sin \theta \sin 2i_2 \sin \frac{1}{2} W^* \\ & - \cos i \sin (\frac{1}{2} W^* - \theta) \left\{ \begin{aligned} & \cos i \sin \theta \cos \frac{1}{2} W^* \\ & + (\sin i \sin 2i_1 - \cos i \cos 2i_1 \cos \theta) \sin \frac{1}{2} W^* \end{aligned} \right\} \\ & - \cos i \cos (\frac{1}{2} W^* - \theta) \left\{ \begin{aligned} & \sin i (\cos 2i_1 \sin 2i_2 + \sin 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2} W^*) \\ & + \cos i \cos \theta (\sin 2i_1 \sin 2i_2 - \cos 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2} W^*) \\ & - \cos i \sin \theta \cos 2i_2 \sin \frac{1}{2} W^* \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Für $i=0$, $i_1=90^\circ$, $i_2=90^\circ$ ergibt sich aus dieser Gleichung

$$\begin{aligned} \pm \cos W^*_1 &= -\sin (\frac{1}{2} W^* - \theta) (\sin \frac{1}{2} W^* \cos \theta + \cos \frac{1}{2} W^* \sin \theta) \\ & + \cos (\frac{1}{2} W^* - \theta) (\cos \frac{1}{2} W^* \cos \theta - \sin \frac{1}{2} W^* \sin \theta) \\ & = \cos (\frac{1}{2} W^* - \theta) \cos (\frac{1}{2} W^* + \theta) - \sin (\frac{1}{2} W^* - \theta) \sin (\frac{1}{2} W^* + \theta). \end{aligned}$$

d. i.

$$\pm \cos W_1 = \cos W.$$

Weil nun in dem in Rede stehenden Falle $W_1 = W$, $\cos W_1 = \cos W$ seyn muss; so sieht man, dass man in der obigen Gleichung das obere Zeichen nehmen muss, und erhält also jetzt den folgenden ganz allgemeinen Ausdruck für $\cos W_1$:

$$166. \cos W_1 =$$

$$\begin{aligned} & \sin^2 i (\cos 2i_1 \cos 2i_2 - \sin 2i_1 \sin 2i_2 \cos \frac{1}{2} W) \\ & + \sin i \cos i \cos \theta (\sin 2i_1 \cos 2i_2 + \cos 2i_1 \sin 2i_2 \cos \frac{1}{2} W) \\ & + \sin i \cos i \sin \theta \sin 2i_2 \sin \frac{1}{2} W \\ & - \cos i \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \left\{ \begin{aligned} & \cos i \sin \theta \cos \frac{1}{2} W \\ & + (\sin i \sin 2i_1 - \cos i \cos 2i_1 \cos \theta) \sin \frac{1}{2} W \end{aligned} \right\} \\ & - \cos i \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \left\{ \begin{aligned} & \sin i (\cos 2i_1 \sin 2i_2 + \sin 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2} W) \\ & + \cos i \cos \theta (\sin 2i_1 \sin 2i_2 - \cos 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2} W) \\ & - \cos i \sin \theta \cos 2i_2 \sin \frac{1}{2} W \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

oder auch, wie sogleich erhellet,

$$167. \cos W_1 =$$

$$\begin{aligned} & \sin^2 i (\cos 2i_1 \cos 2i_2 - \sin 2i_1 \sin 2i_2 \cos \frac{1}{2} W) \\ & + \frac{1}{2} \sin 2i \cos \theta (\sin 2i_1 \cos 2i_2 + \cos 2i_1 \sin 2i_2 \cos \frac{1}{2} W) \\ & + \frac{1}{2} \sin 2i \sin \theta \sin 2i_2 \sin \frac{1}{2} W \\ & - \cos i \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \left\{ \begin{aligned} & \cos i \sin \theta \cos \frac{1}{2} W \\ & + (\sin i \sin 2i_1 - \cos i \cos 2i_1 \cos \theta) \sin \frac{1}{2} W \end{aligned} \right\} \\ & - \cos i \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \left\{ \begin{aligned} & \sin i (\cos 2i_1 \sin 2i_2 + \sin 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2} W) \\ & + \cos i \cos \theta (\sin 2i_1 \sin 2i_2 - \cos 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2} W) \\ & - \cos i \sin \theta \cos 2i_2 \sin \frac{1}{2} W \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir in dieser allgemeinen Formel $i_1 = 90^\circ$, $i_2 = 90^\circ$; so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos W_1 &= \sin^2 i \\ & - \cos^2 i \sin (\frac{1}{2} W - \theta) (\sin \frac{1}{2} W \cos \theta + \cos \frac{1}{2} W \sin \theta) \\ & + \cos^2 i \cos (\frac{1}{2} W - \theta) (\cos \frac{1}{2} W \cos \theta - \sin \frac{1}{2} W \sin \theta) \\ &= \sin^2 i + \cos^2 i \{ \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \cos (\frac{1}{2} W + \theta) - \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \sin (\frac{1}{2} W + \theta) \}, \end{aligned}$$

d. i.

$$\cos W_1 = \sin^2 i + \cos^2 i \cos W,$$

ganz übereinstimmend mit der Gleichung 82.

Setzen wir ferner in der obigen allgemeinen Gleichung $i = 0$, $i_2 = 90^\circ$; so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos W_1 &= - \sin (\frac{1}{2} W - \theta) (\sin \theta \cos \frac{1}{2} W - \cos \theta \cos 2i_1 \sin \frac{1}{2} W) \\ & - \cos (\frac{1}{2} W - \theta) (\sin \theta \sin \frac{1}{2} W + \cos \theta \cos 2i_1 \cos \frac{1}{2} W) \\ &= - \sin \theta \{ \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \cos \frac{1}{2} W + \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \sin \frac{1}{2} W \} \\ & - \cos \theta \cos 2i_1 \{ \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \cos \frac{1}{2} W - \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \sin \frac{1}{2} W \} \\ &= - \sin \theta \sin (W - \theta) - \cos \theta \cos 2i_1 \cos (W - \theta), \end{aligned}$$

woraus man ferner leicht

$$\cos W_1 = \cos W - 2 \cos i_1^2 \cos \theta \cos(W - \theta)$$

erhält, wieder ganz übereinstimmend mit der Gleichung 113.

Setzen wir endlich $i=0$, $i_1=90^\circ$; so erhalten wir aus der obigen allgemeinen Gleichung

$$\begin{aligned} \cos W_1 &= -\sin(\tfrac{1}{2}W - \theta)(\sin \tfrac{1}{2}W \cos \theta + \cos \tfrac{1}{2}W \sin \theta) \\ &\quad - \cos 2i_2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta)(\cos \tfrac{1}{2}W \cos \theta - \sin \tfrac{1}{2}W \sin \theta) \\ &= -\sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \sin(\tfrac{1}{2}W + \theta) - \cos 2i_2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos(\tfrac{1}{2}W + \theta), \end{aligned}$$

woraus sich leicht

$$\cos W_1 = \cos W - 2 \cos i_2^2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos(\tfrac{1}{2}W + \theta)$$

ergibt, welches wieder völlig mit der Gleichung 134. übereinstimmt.

Man sieht also, dass die allgemeine Gleichung 167. in den drei in Rede stehenden speciellen Fällen ganz zu denselben Resultaten führt, wie die oben auf andern Wege ausgeführte Behandlung dieser drei Fälle. Zugleich sieht man auch aus der obigen Entwicklung der allgemeinen Gleichung 167., wie vorthailhaft oft eine zweckmässige Verwandlung der Coordinaten bei der Auflösung von Aufgaben mittelst der allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie ist.

10.

Die allgemeine Formel 166. lässt sich noch auf einen andern bemerkenswerthen Ausdruck bringen. Zuvörderst erhält man nämlich sehr leicht

$$\begin{aligned} \cos W_1 &= \\ &\sin i^2 (\cos 2i_1 \cos 2i_2 - \sin 2i_1 \sin 2i_2 \cos \tfrac{1}{2}W) \\ &- \cos i^2 \left\{ \begin{aligned} &\sin \theta [\sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos \tfrac{1}{2}W - \cos 2i_2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \sin \tfrac{1}{2}W] \\ &- \cos \theta \left[\begin{aligned} &\cos 2i_1 \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \sin \tfrac{1}{2}W \\ &-(\sin 2i_1 \sin 2i_2 - \cos 2i_1 \cos 2i_2 \cos \tfrac{1}{2}W) \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \\ &+ \sin i \cos i \left\{ \begin{aligned} &\cos \theta (\sin 2i_1 \cos 2i_2 + \cos 2i_1 \sin 2i_2 \cos \tfrac{1}{2}W) \\ &+ \sin 2i_2 \sin \theta \sin \tfrac{1}{2}W \\ &- \sin 2i_1 \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \sin \tfrac{1}{2}W \\ &-(\cos 2i_1 \sin 2i_2 + \sin 2i_1 \cos 2i_2 \cos \tfrac{1}{2}W) \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

oder der Kürze wegen

$$\cos W_1 = P \sin i^2 - Q \cos i^2 + R \sin i \cos i.$$

Setzt man

$$\cos 2i_2 = 2 \cos i_2^2 - 1;$$

so erhält man ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} Q &= \sin \theta \{ \sin(W - \theta) - 2 \cos i_2^2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \sin \tfrac{1}{2}W \} \\ &\quad + \cos \theta \{ \cos 2i_1 \cos(W - \theta) + (\sin 2i_1 \sin 2i_2 - 2 \cos 2i_1 \cos i_2^2 \cos \tfrac{1}{2}W) \}, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man

$$\cos 2i_1 = 2 \cos i_1^2 - 1$$

setzt, ferner

$$\begin{aligned} Q &= -\cos W \\ &\quad + 2 \cos \theta \cos i_1^2 \cos(W - \theta) \\ &\quad + 2 \cos i_2^2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos(\tfrac{1}{2}W + \theta) \\ &\quad + 4 \cos \theta \cos i_1 \cos i_2 (\sin i_1 \sin i_2 - \cos i_1 \cos i_2 \cos \tfrac{1}{2}W) \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta). \end{aligned}$$

Eben so leicht ergibt sich, wenn man

$$\cos 2i_1 = 2\cos i_1^2 - 1, \quad \cos 2i_2 = 2\cos i_2^2 - 1$$

setzt,

$$\begin{aligned} R = & 2\sin 2i_1 \cos i_2^2 \{ \cos \theta - \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos \tfrac{1}{2}W \} \\ & + 2\cos i_1^2 \sin 2i_2 \{ \cos \theta \cos \tfrac{1}{2}W - \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \} \\ & - \sin 2i_1 \{ \cos \theta - \cos(W - \theta) \} \\ & - \sin 2i_2 \{ \cos(\tfrac{1}{2}W + \theta) - \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \} \end{aligned}$$

und folglich nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned} R = & \sin 2i_1 \cos i_2^2 \{ \cos \theta - \cos(W - \theta) \} \\ & - 2\sin \theta \cos i_1^2 \sin 2i_2 \sin \tfrac{1}{2}W \\ & - 2\sin 2i_1 \sin \tfrac{1}{2}W \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \\ & + 2\sin \theta \sin 2i_2 \sin \tfrac{1}{2}W \\ = & 2\sin 2i_1 \cos i_2^2 \sin \tfrac{1}{2}W \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \\ & - 2\sin \theta \cos i_1^2 \sin 2i_2 \sin \tfrac{1}{2}W \\ & - 2\sin 2i_1 \sin \tfrac{1}{2}W \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \\ & + 2\sin \theta \sin 2i_2 \sin \tfrac{1}{2}W \\ = & 2\sin \tfrac{1}{2}W \{ \sin \theta \sin i_1^2 \sin 2i_2 - \sin 2i_1 \sin i_2^2 \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \} \\ = & 4\sin i_1 \sin i_2 \sin \tfrac{1}{2}W \{ \sin \theta \sin i_1 \cos i_2 - \cos i_1 \sin i_2 \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} 168. \quad \cos W_1 = & \sin i^2 (\cos 2i_1 \cos 2i_2 - \sin 2i_1 \sin 2i_2 \cos \tfrac{1}{2}W) \\ & + \cos i^2 \left\{ \begin{aligned} & \cos W \\ & - 2\cos i_1^2 \cos \theta \cos(W - \theta) \\ & - 2\cos i_2^2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos(\tfrac{1}{2}W + \theta) \\ & - 4\cos i_1 \cos i_2 \cos \theta (\sin i_1 \sin i_2 - \cos i_1 \cos i_2 \cos \tfrac{1}{2}W) \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \end{aligned} \right\} \\ & + 4\sin i \cos i \sin i_1 \sin i_2 \sin \tfrac{1}{2}W \{ \sin i_1 \cos i_2 \sin \theta - \cos i_1 \sin i_2 \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \}. \end{aligned}$$

Auch ist

$$\begin{aligned} 169. \quad \cos W_1 = & \cos W \\ & + \sin i^2 (\cos 2i_1 \cos 2i_2 - \sin 2i_1 \sin 2i_2 \cos \tfrac{1}{2}W - \cos W) \\ & - 2\cos i^2 \left\{ \begin{aligned} & \cos i_1^2 \cos \theta \cos(W - \theta) \\ & + \cos i_2^2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos(\tfrac{1}{2}W + \theta) \\ & + 2\cos i_1 \cos i_2 \cos \theta (\sin i_1 \sin i_2 - \cos i_1 \cos i_2 \cos \tfrac{1}{2}W) \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \end{aligned} \right\} \\ & + 4\sin i \cos i \sin i_1 \sin i_2 \sin \tfrac{1}{2}W \{ \sin i_1 \cos i_2 \sin \theta - \cos i_1 \sin i_2 \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) \}^*). \end{aligned}$$

11.

Setzen wir jetzt

$$i = x, \quad i_1 = \tfrac{1}{2}\pi - y, \quad i_2 = \tfrac{1}{2}\pi - z$$

*) Noch eine Form, welche man dieser Gleichung geben kann, wird weiter unten vorkommen.

und folglich $2i_1 = \pi - 2y$, $2i_2 = \pi - 2z$; so erhalten wir nach 169.

$$\begin{aligned} \cos W_1 = & \cos W \\ & + \sin x^2 (\cos 2y \cos 2z - \sin 2y \sin 2z \cos \tfrac{1}{2}W - \cos W) \\ & - 2 \cos x^2 \left\{ \begin{aligned} & \sin y^2 \cos \theta \cos (W - \theta) \\ & + \sin z^2 \cos (\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos (\tfrac{1}{2}W + \theta) \\ & + 2 \sin y \sin z \cos \theta (\cos y \cos z - \sin y \sin z \cos \tfrac{1}{2}W) \cos (\tfrac{1}{2}W - \theta) \end{aligned} \right\} \\ & + 4 \sin x \cos x \cos y \cos z \sin \tfrac{1}{2}W \{ \cos y \sin z \sin \theta - \sin y \cos z \sin (\tfrac{1}{2}W - \theta) \}. \end{aligned}$$

Entwickeln wir nun die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens bis auf Glieder der zweiten Ordnung; so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos W_1 = & \cos W + 2x^2 \sin \tfrac{1}{2}W^2 \\ & - 2y^2 \cos \theta \cos (W - \theta) \\ & - 2z^2 \cos (\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos (\tfrac{1}{2}W + \theta) \\ & - 4xy \sin (\tfrac{1}{2}W - \theta) \sin \tfrac{1}{2}W \\ & + 4xz \sin \theta \sin \tfrac{1}{2}W \\ & - 4yz \cos \theta \cos (\tfrac{1}{2}W - \theta). \end{aligned}$$

Weil aber

$$\begin{aligned} \cos W_1 - \cos W = & 2 \sin \tfrac{1}{2}(W + W_1) \sin \tfrac{1}{2}(W - W_1) \\ = & 2 \sin (W - \tfrac{1}{2}(W - W_1)) \sin \tfrac{1}{2}(W - W_1) \\ = & 2 \{ \sin W \cos \tfrac{1}{2}(W - W_1) - \cos W \sin \tfrac{1}{2}(W - W_1) \} \sin \tfrac{1}{2}(W - W_1) \\ = & \sin W \sin (W - W_1) - 2 \cos W \sin \tfrac{1}{2}(W - W_1)^2, \end{aligned}$$

oder, wenn man statt der Sinus die entsprechenden Bogen setzt, näherungsweise

$$\cos W_1 - \cos W = (W - W_1) \sin W - \tfrac{1}{2}(W - W_1)^2 \cos W$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} (W - W_1) \sin W = & \tfrac{1}{2}(W - W_1)^2 \cos W \\ & + 2x^2 \sin \tfrac{1}{2}W^2 \\ & - 2y^2 \cos \theta \cos (W - \theta) \\ & - 2z^2 \cos (\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos (\tfrac{1}{2}W + \theta) \\ & - 4xy \sin (\tfrac{1}{2}W - \theta) \sin \tfrac{1}{2}W \\ & + 4xz \sin \theta \sin \tfrac{1}{2}W \\ & - 4yz \cos \theta \cos (\tfrac{1}{2}W - \theta), \end{aligned}$$

und folglich offenbar bis auf Grössen der zweiten Ordnung genau

$$\begin{aligned} W - W_1 = & x^2 \tan \tfrac{1}{2}W \\ & - 2y^2 \frac{\cos \theta \cos (W - \theta)}{\sin W} \\ & - 2z^2 \frac{\cos (\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos (\tfrac{1}{2}W + \theta)}{\sin W} \\ & - 2xy \frac{\sin (\tfrac{1}{2}W - \theta)}{\cos \tfrac{1}{2}W} \\ & + 2xz \frac{\sin \theta}{\cos \tfrac{1}{2}W} - 4yz \frac{\cos \theta \cos (\tfrac{1}{2}W - \theta)}{\sin W}, \end{aligned}$$

oder

$$170. \quad W_1 = W - \frac{x^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} W}{\sin W} + 2y^2 \frac{\cos \theta \cos (W - \theta)}{\sin W} + 2z^2 \frac{\cos (\frac{1}{2} W - \theta) \cos (\frac{1}{2} W + \theta)}{\sin W} + 2xy \frac{\sin (\frac{1}{2} W - \theta)}{\cos \frac{1}{2} W} - 2xz \frac{\sin \theta}{\cos \frac{1}{2} W} + 4yz \frac{\cos \theta \cos (\frac{1}{2} W - \theta)}{\sin W},$$

und, wenn x, y, z, W, W_1 in Secunden ausgedrückt seyn sollen,

$$171. \quad W_1 = W - \frac{x^2 \sin 1'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} W}{\sin W} + 2y^2 \frac{\sin 1'' \cos \theta \cos (W - \theta)}{\sin W} + 2z^2 \frac{\sin 1'' \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \cos (\frac{1}{2} W + \theta)}{\sin W} + 2xy \frac{\sin 1'' \sin (\frac{1}{2} W - \theta)}{\cos \frac{1}{2} W} - 2xz \frac{\sin 1'' \sin \theta}{\cos \frac{1}{2} W} + 4yz \frac{\sin 1'' \cos \theta \cos (\frac{1}{2} W - \theta)}{\sin W}.$$

Für $i_1 + i_2 = \pi$ ist $y + z = 0, z = -y$, und folglich nach 171.

$$W_1 =$$

$$\begin{aligned} & W \\ & - x^2 \sin 1'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} W \\ & + 2y^2 \frac{\sin 1'' \{ \cos \theta \cos (W - \theta) + \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \cos (\frac{1}{2} W + \theta) - 2 \cos \theta \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \}}{\sin W} \\ & + 2xy \frac{\sin 1'' \{ \sin (\frac{1}{2} W - \theta) + \sin \theta \}}{\cos \frac{1}{2} W}. \end{aligned}$$

Aber

$$\sin (\frac{1}{2} W - \theta) + \sin \theta = 2 \sin \frac{1}{4} W \cos (\frac{1}{4} W - \theta),$$

und

$$\begin{aligned} & \cos \theta \cos (W - \theta) + \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \cos (\frac{1}{2} W + \theta) - 2 \cos \theta \cos (\frac{1}{2} W - \theta) \\ & = \cos W + \frac{1}{2} \cos (W - 2\theta) + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos \frac{1}{2} W - \cos (\frac{1}{2} W - 2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos W + \cos \frac{1}{2} W \cos(\frac{1}{2} W - 2\theta) - \cos \frac{1}{2} W - \cos(\frac{1}{2} W - 2\theta) \\
 &= -\sin \frac{1}{2} W^2 - (1 - \cos \frac{1}{2} W) \{ \cos \frac{1}{2} W + \cos(\frac{1}{2} W - 2\theta) \} \\
 &= -\sin \frac{1}{2} W^2 - 4 \sin \frac{1}{4} W^2 \cos(\frac{1}{2} W - \theta) \cos \theta \\
 &= -4 \sin \frac{1}{4} W^2 \{ \cos \frac{1}{4} W^2 + \cos(\frac{1}{2} W - \theta) \cos \theta \} \\
 &= -4 \sin \frac{1}{4} W^2 \{ \cos \frac{1}{4} W^2 + \cos \frac{1}{2} W \cos \theta^2 + \sin \frac{1}{2} W \sin \theta \cos \theta \} \\
 &= -4 \sin \frac{1}{4} W^2 \{ 2 \cos \frac{1}{4} W^2 - (\sin \frac{1}{4} W \cos \theta - \cos \frac{1}{4} W \sin \theta)^2 \} \\
 &= -4 \sin \frac{1}{4} W^2 \{ 2 \cos \frac{1}{4} W^2 - \sin(\frac{1}{4} W - \theta)^2 \} \\
 &= -8 \sin \frac{1}{4} W^2 \{ \cos \frac{1}{4} W^2 - \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{4} W - \theta)^2 \}.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$172. \quad W_1 = W - x^2 \sin l'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} W$$

$$\begin{aligned}
 &- 16y^2 \frac{\sin l'' \sin \frac{1}{4} W^2 \{ \cos \frac{1}{4} W^2 - \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{4} W - \theta)^2 \}}{\sin W} \\
 &+ 4xy \frac{\sin l'' \sin \frac{1}{4} W \cos(\frac{1}{4} W - \theta)}{\cos \frac{1}{2} W}.
 \end{aligned}$$

Berechnet man den Hülfswinkel V mittelst der Formel

$$173. \quad \cos \frac{1}{4} V = \frac{\sin(\frac{1}{4} W - \theta)}{\sqrt{2}};$$

so ist

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{1}{4} W^2 - \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{4} W - \theta)^2 &= \cos \frac{1}{4} W^2 - \cos \frac{1}{4} V^2 \\
 &= (\cos \frac{1}{4} W + \cos \frac{1}{4} V)(\cos \frac{1}{4} W - \cos \frac{1}{4} V) \\
 &= -\sin \frac{1}{4}(W + V) \sin \frac{1}{4}(W - V),
 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
 174. \quad W_1 &= W - x^2 \sin l'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} W \\
 &+ 16y^2 \frac{\sin l'' \sin \frac{1}{4} W^2 \sin \frac{1}{4}(W + V) \sin \frac{1}{4}(W - V)}{\sin W} \\
 &+ 4xy \frac{\sin l'' \sin \frac{1}{4} W \cos(\frac{1}{4} W - \theta)}{\cos \frac{1}{2} W}.
 \end{aligned}$$

Auch ist

$$\sin W = 2 \sin \frac{1}{2} W \cos \frac{1}{2} W = 4 \sin \frac{1}{4} W \cos \frac{1}{4} W \cos \frac{1}{2} W,$$

und folglich

$$\frac{\sin \frac{1}{4} W^2}{\sin W} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{4} W}{4 \cos \frac{1}{2} W}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 175. \quad W_1 &= W - x^2 \sin l'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} W \\
 &+ 4y^2 \frac{\sin l'' \operatorname{tang} \frac{1}{4} W \sin \frac{1}{4}(W + V) \sin \frac{1}{4}(W - V)}{\cos \frac{1}{2} W} \\
 &+ 4xy \frac{\sin l'' \sin \frac{1}{4} W \cos(\frac{1}{4} W - \theta)}{\cos \frac{1}{2} W}.
 \end{aligned}$$

12.

Bevor wir zu einigen Bemerkungen über die praktischen Anwendungen, welche sich von den im Vorhergehenden entwickelten Formeln machen lassen, übergehen können, müssen wir zuerst den folgenden wichtigen Satz und einige aus demselben gezogene Folgerungen vorausschicken.

A und B seyen zwei leuchtende Punkte. Von A falle ein Lichtstrahl auf die hintere unbelegte Seite des kleinen Spiegels des Sextanten und gelange ohne Reflexion durch das Fernrohr in das Auge des Beobachters. Von B falle ein Lichtstrahl auf den grossen Spiegel und gelange nach zweimaliger Reflexion ebenfalls durch das Fernrohr in das Auge des Beobachters. Sind nun die beiden von A und B ausgehenden Strahlen einander parallel, und giebt man den beiden Spiegeln eine solche Lage, dass die Bilder der beiden leuchtenden Punkte A und B sich genau decken; so sind in dieser Lage die beiden Spiegelebenen einander genau parallel, welche Lage auch die Visirlinie haben mag.

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, überlege man, dass unter den gemachten Voraussetzungen der von *B* auf den grossen Spiegel fallende, und der durch Reflexion von dem kleinen Spiegel in das Auge des Beobachters gelangende Lichtstrahl offenbar einander parallel sind. Legt man also durch den letztern Strahl und den zwischen beiden Spiegeln liegenden Strahl eine Ebene; so liegt in dieser Ebene offenbar auch der von *B* auf den grossen Spiegel fallende Strahl, und diese Ebene ist, weil in ihr nach katoptrischen Gesetzen auch die beiden Einfallslothe liegen, auf den beiden Spiegelebenen senkrecht, so dass also umgekehrt die Spiegelebenen beide auf der in Rede stehenden Ebene senkrecht sind. Sey nun in Fig. 14. die Ebene des Papiers diese Ebene, auf welcher die beiden Spiegelebenen senkrecht stehen, und *KL*, *MN* seyen respective die Durchschnitte der Ebenen des kleinen und grossen Spiegels mit derselben. *BC* sey der von dem Punkte *B* auf den grossen Spiegel fallende Strahl, *DE* sey der durch Reflexion von dem kleinen Spiegel in das Auge des Beobachters gelangende Strahl, wobei man nicht zu vergessen hat, dass nach dem Vorhergehenden die beiden in Rede stehenden Strahlen in der Ebene, auf welcher beide Spiegel senkrecht stehen, d. h. hier in der Ebene des Papiers liegen. Da nun nach dem Obigen die Linien *BC* und *DE* einander parallel sind; so sind die beiden Winkel *BCD* und *CDE* einander gleich, und es ist folglich

$$\angle BCM + \angle DCN = \angle CDK + \angle EDL.$$

Nach katoptrischen Gesetzen ist aber

$$\angle BCM = \angle DCN, \quad \angle CDK = \angle EDL.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$2\angle DCN = 2\angle CDK, \quad \text{d. i. } \angle DCN = \angle CDK,$$

und die Linien *KL* und *MN*, d. i. die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Ebene, auf welcher sie beide senkrecht stehen, sind folglich einander parallel, woraus unmittelbar folgt, dass die beiden Spiegelebenen selbst einander parallel sind, wie bewiesen werden sollte.

Zwei Lichtstrahlen, die von einem sehr weit entfernten leuchtenden Punkte, etwa von einem Fixsterne, auf den grossen und kleinen Spiegel fallen, können ohne allen merklichen Fehler als parallel betrachtet werden, worauf sich die folgende Methode gründet, die beiden Spiegelebenen in eine solche Lage zu bringen, dass sie einander parallel sind. Man gebe nämlich dem grossen Spiegel durch Drehung der Alhidade, dem kleinen Spiegel mittelst der an seinem untersten Theile, mit welchem er auf die Ebene des Sextanten aufgeschraubt ist, auf seiner Rückseite befindlichen Stellschraube

eine solche Lage, dass das direct und das durch doppelte Reflexion geschehene Bild eines sehr weit entfernten leuchtenden Punktes, etwa eines hellen Fixsterns, einander genau decken, und stelle in dieser Lage die Alhidade fest; so werden nach dem vorher bewiesenen Satze die Ebenen der beiden Spiegel, und also auch ihre Durchschnittslinien mit der Ebene des Sextanten einander parallel seyn. Wird nun zugleich der Nonius abgelesen; so erhält man den Collimations- oder Indexfehler des Sextanten, wie unmittelbar aus dem in §. 2. ausführlich erörterten Begriffe des Collimationsfehlers hervorgeht. Zu beachten hat man nur, ob bei der Ablesung der Nullpunkt des Nonius sich auf dem Limbus des Sextanten selbst oder auf dem Excedens befand, und hat im ersten Falle den Collimationsfehler als positiv, im zweiten dagegen als negativ zu betrachten.

Dieses Verfahren ist sehr leicht und mit grosser Schärfe und Genauigkeit ausführbar. Zugleich übersieht man auf der Stelle, dass durch dasselbe bewirkt wird, dass bei jeder Lage, welche man der Alhidade auch geben mag, der grosse und kleine Spiegel unter gleichen Winkeln gegen die Sextantenebene geneigt sind, oder dass, wenn wir i_1 und i_2 jetzt wieder dasselbe wie in §. 9., §. 10. und §. 11. bedeuten lassen,

$$i_1 + i_2 = \pi$$

ist. Ist also der Collimationsfehler auf die vorher gezeigte Art bestimmt, und der Sextant überhaupt in jeder Beziehung durch die gewöhnlichen mechanischen Hilfsmittel auf das Sorgfältigste berichtigt worden; so wird man berechtigt seyn, die Formeln 172., 174. oder 175. anzuwenden. Da aber diese Formeln den Winkel θ , welcher für jeden einzelnen Sextanten eine bestimmte Grösse hat, als bekannt voraussetzen; so will ich zuvörderst ein Verfahren angeben, durch welches dieser Winkel bestimmt werden kann.

13.

Der Winkel θ ist nach §. 9. der spitze Winkel, welchen die Projection der Visirlinie auf der Ebene des Sextanten mit einem auf die Durchschnittslinie des kleinen Spiegels mit der Ebene des Sextanten in letzterer errichteten Perpendikel einschliesst, für den man aber, wenn der Sextant nur durch die bekannten mechanischen Hilfsmittel auf das Sorgfältigste berichtigt worden ist, unbedenklich die Ergänzung des Neigungswinkels der Visirlinie gegen die Ebene des kleinen Spiegels zu neunzig Graden setzen kann. Um nun, dies vorausgesetzt, den Winkel θ für meinen fünfzölligen *Pistorschen* Sextanten zu bestimmen, liess ich mir ein Täfelchen von Messing machen, welches auf einem aus demselben Material verfertigten Fussgestelle senkrecht gegen dasselbe befestigt, und auf seiner vordern Fläche weiss lackirt oder versilbert war. In der Mitte dieses Täfelchens befand sich ein kreisrundes Loch von etwa acht Linien im Durchmesser. Nun legte ich den Sextanten auf einem geeigneten Stative mittelst eines Dossenniveaus oder einer Röhrenlibelle horizontal, stellte das Täfelchen dem Sextanten gegenüber in möglichst grosser Entfernung von demselben auf, brachte es in gleiche Höhe mit dem Sextanten, und diesen hierauf durch leise Verschiebung auf dem Stative in eine solche Lage, dass ich das Loch in dem Täfelchen genau in der Mitte zwischen den beiden im Brennpunkte des Fernrohrs ausgespannten Fäden, die ich vorher auf die Ebene des Sextanten senkrecht gestellt hatte, überhaupt möglichst genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erblickte, wobei einige auf dem Täfelchen um das Loch gezogene, mit demselben concentrische Kreislinien gute Dienste leisteten. Hierauf begab ich mich mit einem Fernrohre, welches bei den von mir angestellten Versuchen ein terrestrisches war, hinter das Täfelchen, und liess, ohne die Lage des Sextanten und des Täfelchens im Geringsten zu ändern, durch einen Gehülfen die Alhidade des Sextanten, natürlich auch mit Hülfe der Mikrometerschraube, so lange drehen, bis ich das

Bild des Loches, durch welches selbst ich mit dem Fernrohre in den grossen Spiegel hinein schauete, genau in der Mitte des grossen Spiegels erblickte. Das Objectiv des Fernrohrs hielt ich hierbei möglichst nahe an die hintere Seite des Täfelchens, weil sich dadurch gegen die weisse vordere Seite desselben ein schwarzer Hintergrund bildete, wodurch das scharfe Sehen des Loches im grossen Spiegel des Sextanten sehr erleichtert und befördert wurde. Man begreift nun leicht, dass bei der vorher angegebenen Lage des Sextanten und seiner Alhidade die Visirlinie des Fernrohrs des Sextanten nach der Mitte des Loches in dem Täfelchen gerichtet ist, und die von der Mitte des Loches nach der Mitte des grossen Spiegels gezogene gerade Linie auf letzterem senkrecht steht. Ist also in Fig. 15. MN der grosse Spiegel, A seine Mitte, KL der kleine Spiegel, FG die Visirlinie, O die Mitte des Loches in dem Täfelchen; so ist OGF eine gerade Linie, und OA steht auf MN senkrecht. Bezeichnen wir nun durch w die Angabe des Nonius bei der angegebenen Lage des grossen Spiegels, durch c den Collimationsfehler des Sextanten; so ist $\frac{1}{2}(w - c)$ das Maass des Winkels KHM , d. h. des Neigungswinkels der beiden Spiegelebenen gegen einander, und dieser Winkel also bekannt, wenn nur vor den Versuchen der Collimationsfehler c sorgfältig bestimmt worden ist. Aus der Figur erhellet nun aber auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichung

$$90^\circ - \phi = 90^\circ - \theta + \frac{1}{2}(w - c),$$

oder

$$176. \quad \theta = \phi + \frac{1}{2}(w - c),$$

so dass also θ bestimmt seyn würde, wenn ϕ bekannt wäre. Um diesen Winkel zu bestimmen, wird sowohl die Entfernung OA des Loches vom grossen Spiegel, als auch die Entfernung AB der Mitte des grossen Spiegels von dem Punkte, in welchem die Visirlinie von der erweiterten Ebene des grossen Spiegels geschnitten wird, letztere mit einem Zirkel gemessen, wobei man übrigens, wenn nur OA gegen AB von beträchtlicher Grösse ist, nicht mit scrupulöser Genauigkeit zu verfahren braucht. Setzen wir nun

$$OA = m, \quad AB = n;$$

so ist $n = m \tan \phi$, folglich

$$177. \quad \tan \phi = \frac{n}{m},$$

und hierdurch also der zu der Bestimmung von θ mittelst der Formel 176. nöthige Winkel ϕ gefunden.

Vorzüglich wichtig bei dieser Methode, den Winkel θ zu bestimmen, ist es, die Entfernung der Tafel vom Sextanten so gross als möglich zu nehmen. Je grösser aber diese Entfernung angenommen wird, desto schwieriger ist es, den Sextanten und die Tafel in eine solche gegenseitige Lage zu bringen, dass bei dem Drehen der Alhidade das Loch in der Tafel von dem hinter derselben stehenden Beobachter auch wirklich in der Mitte des grossen Spiegels erblickt wird. Durch mehrfache Übung wird man sich aber die nöthige Fertigkeit aneignen, und wird sich auch leicht manche praktische Hilfsmittel selbst erdenken *).

Von mehrern mit meinem *Pistor'schen* Sextanten angestellten Versuchen will ich hier nur die folgenden anführen. Ein und zwanzig Beobachtungen gaben mir für w die folgenden Werthe

*) Andere Methoden, den Winkel θ zu bestimmen, s. m. in einer im *Berliner astronomischen Jahrbuche* für 1830 befindlichen, viele treffliche praktische Bemerkungen enthaltenden Abhandlung von *Encke* über den Spiegelsextanten, von der nachher noch weiter die Rede seyn wird.

$$w = 32^{\circ}. 12' . 30''$$

$$32 . 12 . 50$$

$$32 . 12 . 0$$

$$32 . 12 . 40$$

$$32 . 12 . 30$$

$$32 . 12 . 30$$

$$32 . 12 . 45$$

$$32 . 12 . 30$$

$$32 . 12 . 40$$

$$32 . 12 . 30$$

$$32 . 12 . 50$$

$$32 . 12 . 35$$

$$32 . 12 . 30$$

$$32 . 12 . 35$$

$$32 . 12 . 35$$

$$32 . 12 . 45$$

$$32 . 12 . 35$$

$$32 . 12 . 20$$

$$32 . 12 . 45$$

$$32 . 12 . 25$$

$$32 . 12 . 20$$

$$\text{Mittel} = 32^{\circ}. 12' . 34'', 8$$

Ferner war $c = 1' . 24'', 6$

$$m = 823''$$

$$n = 1''$$

Die Formel $\tan \phi = \frac{n}{m}$ giebt

$$\phi = 4' . 11'' .$$

Also haben wir

$$w = 32^{\circ}. 12' . 34'', 8$$

$$c = 1' . 24'', 6$$

$$w - c = 32 . 11 . 10, 2$$

$$\frac{1}{2}(w - c) = 16 . 5 . 35, 1$$

$$\phi = 4 . 11, 0$$

$$\theta = 16^{\circ}. 9' . 46'', 1$$

welches also der Werth von θ für meinen fünfzölligen *Pistor'schen* Sextanten ist.

14.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen gezeigt haben, wie sich der Winkel θ bestimmen lässt, wollen wir nun ferner zeigen, wie die Fehler des Sextanten selbst bestimmt werden können, setzen dabei aber voraus, dass die beiden Spiegel gegen die Sextantenebene unter gleichen Winkeln geneigt seyen, welches sich in der That mittelst des aus §. 12. bekannten Verfahrens, durch welches zugleich auch der Collimationsfehler gefunden wird, mit grosser Schärfe erreichen lässt. Nehmen wir nun ferner auch an, dass der Sextant durch die gewöhnlichen mechanischen Hülfsmittel sorgfältig berichtigt worden ist; so werden wir bei der Bestimmung der noch übrig gebliebenen Fehler die Formeln 172., 174. oder 175. in Anwendung zu bringen berechtigt seyn.

Zu dem Ende messe man nun mittelst des Sextanten in drei möglichst grossen Dreiecken ABC , $A'B'C$, $A''B''C''$ die sämtlichen Winkel

$$A, B, C; A', B', C'; A'', B'', C'';$$

und bezeichne die diesen mit dem Sextanten gemessenen Winkeln entsprechenden wahren Winkel respective durch

$$A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1; A''_1, B''_1, C''_1.$$

Hierauf berechne man die Hülfswinkel

$$\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$$

mittelst der Formeln

$$\cos \frac{1}{4} \mathfrak{A} = \frac{\sin(\frac{1}{4} A - \theta)}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{4} \mathfrak{B} = \frac{\sin(\frac{1}{4} B - \theta)}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{4} \mathfrak{C} = \frac{\sin(\frac{1}{4} C - \theta)}{\sqrt{2}};$$

$$\cos \frac{1}{4} \mathfrak{A}' = \frac{\sin(\frac{1}{4} A' - \theta)}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{4} \mathfrak{B}' = \frac{\sin(\frac{1}{4} B' - \theta)}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{4} \mathfrak{C}' = \frac{\sin(\frac{1}{4} C' - \theta)}{\sqrt{2}};$$

$$\cos \frac{1}{4} \mathfrak{A}'' = \frac{\sin(\frac{1}{4} A'' - \theta)}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{4} \mathfrak{B}'' = \frac{\sin(\frac{1}{4} B'' - \theta)}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{4} \mathfrak{C}'' = \frac{\sin(\frac{1}{4} C'' - \theta)}{\sqrt{2}};$$

setze der Kürze wegen

$$\alpha = -\sin l'' \tan \frac{1}{2} A,$$

$$\beta = -\sin l'' \tan \frac{1}{2} B,$$

$$\gamma = -\sin l'' \tan \frac{1}{2} C;$$

$$\alpha_1 = \frac{4 \sin l'' \tan \frac{1}{4} A \sin \frac{1}{4} (A + \mathfrak{A}) \sin \frac{1}{4} (A - \mathfrak{A})}{\cos \frac{1}{2} A},$$

$$\beta_1 = \frac{4 \sin l'' \tan \frac{1}{4} B \sin \frac{1}{4} (B + \mathfrak{B}) \sin \frac{1}{4} (B - \mathfrak{B})}{\cos \frac{1}{2} B},$$

$$\gamma_1 = \frac{4 \sin l'' \tan \frac{1}{4} C \sin \frac{1}{4} (C + \mathfrak{C}) \sin \frac{1}{4} (C - \mathfrak{C})}{\cos \frac{1}{2} C};$$

$$\alpha_2 = \frac{4 \sin l'' \sin \frac{1}{4} A \cos(\frac{1}{4} A - \theta)}{\cos \frac{1}{2} A},$$

$$\beta_2 = \frac{4 \sin l'' \sin \frac{1}{4} B \cos(\frac{1}{4} B - \theta)}{\cos \frac{1}{2} B},$$

$$\gamma_2 = \frac{4 \sin l'' \sin \frac{1}{4} C \cos(\frac{1}{4} C - \theta)}{\cos \frac{1}{2} C};$$

und bezeichne die entsprechenden Grössen in den Dreiecken $A'B'C'$ und $A''B''C''$ durch

$$\alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1; \quad \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$$

und

$$\alpha'', \beta'', \gamma''; \quad \alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1; \quad \alpha''_2, \beta''_2, \gamma''_2;$$

so hat man, wenn

$$x^2 = X, \quad y^2 = Y, \quad xy = Z$$

gesetzt wird, nach 175. die folgenden Gleichungen:

$$A_1 = A + \alpha X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z,$$

$$B_1 = B + \beta X + \beta_1 Y + \beta_2 Z,$$

$$C_1 = C + \gamma X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z;$$

$$A'_1 = A' + \alpha' X + \alpha'_1 Y + \alpha'_2 Z,$$

$$B'_1 = B' + \beta' X + \beta'_1 Y + \beta'_2 Z,$$

$$C'_1 = C' + \gamma' X + \gamma'_1 Y + \gamma'_2 Z;$$

$$A''_1 = A'' + \alpha'' X + \alpha''_1 Y + \alpha''_2 Z,$$

$$B''_1 = B'' + \beta'' X + \beta''_1 Y + \beta''_2 Z,$$

$$C''_1 = C'' + \gamma'' X + \gamma''_1 Y + \gamma''_2 Z.$$

Weil nun

$$A_1 + B_1 + C_1 = 180^\circ = 648000'' ,$$

$$A'_1 + B'_1 + C'_1 = 180^\circ = 648000'' ,$$

$$A''_1 + B''_1 + C''_1 = 180^\circ = 648000''$$

ist; so erhält man aus den obigen Gleichungen die drei folgenden Gleichungen:

$$648000 - (A + B + C) \\ = (a + \beta + \gamma) X + (a_1 + \beta_1 + \gamma_1) Y + (a_2 + \beta_2 + \gamma_2) Z ,$$

$$648000 - (A' + B' + C') \\ = (a' + \beta' + \gamma') X + (a'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1) Y + (a'_2 + \beta'_2 + \gamma'_2) Z ,$$

$$648000 - (A'' + B'' + C'') \\ = (a'' + \beta'' + \gamma'') X + (a''_1 + \beta''_1 + \gamma''_1) Y + (a''_2 + \beta''_2 + \gamma''_2) Z ;$$

mittelst welcher sich die drei Grössen X, Y, Z , d. i. die drei Grössen x^2, y^2, xy bestimmen lassen. Da nun x seiner Natur nach stets positiv ist, und man x^2, y^2 und das Product xy kennt; so wird man auch immer die Grössen x, y selbst finden können.

Dass hier, um die zwei unbekannten Grössen x und y zu bestimmen, drei Gleichungen zwischen diesen beiden Grössen gebildet worden sind, findet seine Erklärung darin, dass, wenn bloss zwei Gleichungen gebildet worden wären, die Auflösung auf quadratische Gleichungen geführt haben würde.

Auf diese Weise wird man schon ziemlich genäherte Werthe von x und y erhalten, die durch λ und μ bezeichnet werden mögen. Will man nun aber x und y genauer erhalten; so setze man

$$x = \lambda + \delta, \quad y = \mu + \varepsilon ,$$

wo δ und ε Grössen seyn werden, deren absolute Werthe im Verhältniss zu den absoluten Werthen von λ und μ sehr klein sind, so dass also näherungsweise

$$x^2 = \lambda^2 + 2\lambda\delta, \quad y^2 = \mu^2 + 2\mu\varepsilon, \quad xy = \lambda\mu + \mu\delta + \lambda\varepsilon$$

gesetzt werden kann. Hat man dann die sämmtlichen Winkel in einer grössern Anzahl von Dreiecken

$$ABC, A'B'C', A''B''C'', A'''B'''C''', \dots$$

mit dem Sextanten gemessen; so erhält man, wenn die Symbole

$$\begin{aligned} & a, \beta, \gamma; \quad a_1, \beta_1, \gamma_1; \quad a_2, \beta_2, \gamma_2; \\ & a', \beta', \gamma'; \quad a'_1, \beta'_1, \gamma'_1; \quad a'_2, \beta'_2, \gamma'_2; \\ & a'', \beta'', \gamma''; \quad a''_1, \beta''_1, \gamma''_1; \quad a''_2, \beta''_2, \gamma''_2; \\ & a''', \beta''', \gamma'''; \quad a'''_1, \beta'''_1, \gamma'''_1; \quad a'''_2, \beta'''_2, \gamma'''_2; \\ & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

eine ganz ähnliche Bedeutung haben wir vorher, und der Kürze wegen die bekannten Grössen

$$648000'' - (A+B+C) - (a+\beta+\gamma)\lambda^2 - (a_1+\beta_1+\gamma_1)\mu^2 - (a_2+\beta_2+\gamma_2)\lambda\mu ,$$

$$648000'' - (A'+B'+C') - (a'+\beta'+\gamma')\lambda^2 - (a'_1+\beta'_1+\gamma'_1)\mu^2 - (a'_2+\beta'_2+\gamma'_2)\lambda\mu ,$$

$$648000'' - (A''+B''+C'') - (a''+\beta''+\gamma'')\lambda^2 - (a''_1+\beta''_1+\gamma''_1)\mu^2 - (a''_2+\beta''_2+\gamma''_2)\lambda\mu ,$$

$$648000'' - (A''' + B''' + C''') - (a''' + \beta''' + \gamma''')\lambda^2 - (a'''_1 + \beta'''_1 + \gamma'''_1)\mu^2 - (a'''_2 + \beta'''_2 + \gamma'''_2)\lambda\mu ,$$

u. s. w.

respective durch

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''', \dots$$

bezeichnet werden, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Delta &= \{2(a+\beta+\gamma)\lambda + (a_2+\beta_2+\gamma_2)\mu\}\delta + \{2(a_1+\beta_1+\gamma_1)\mu + (a_2+\beta_2+\gamma_2)\lambda\}\varepsilon, \\ \Delta' &= \{2(a'+\beta'+\gamma')\lambda + (a'_2+\beta'_2+\gamma'_2)\mu\}\delta + \{2(a'_1+\beta'_1+\gamma'_1)\mu + (a'_2+\beta'_2+\gamma'_2)\lambda\}\varepsilon, \\ \Delta'' &= \{2(a''+\beta''+\gamma'')\lambda + (a''_2+\beta''_2+\gamma''_2)\mu\}\delta + \{2(a''_1+\beta''_1+\gamma''_1)\mu + (a''_2+\beta''_2+\gamma''_2)\lambda\}\varepsilon, \\ \Delta''' &= \{2(a''' + \beta''' + \gamma''')\lambda + (a'''_2 + \beta'''_2 + \gamma'''_2)\mu\}\delta + \{2(a'''_1 + \beta'''_1 + \gamma'''_1)\mu + (a'''_2 + \beta'''_2 + \gamma'''_2)\lambda\}\varepsilon,\end{aligned}$$

u. s. w.

die man nun, um die Verbesserungen δ und ε zu finden, nach der Methode der kleinsten Quadrate auflösen muss.

Ich muss gestehen, dass es mir scheint, als wenn es das Beste wäre, wenn die Künstler bei der Verfertigung der Sextanten wieder zu dem schon von dem grossen *Ramsden* gemachten Vorschlage *): mit Ausnahme der einen Correctionsschraube, welche dient, den kleinen Spiegel unter demselben Winkel wie den grossen Spiegel gegen die Sextantenebene zu neigen, und deshalb auch bei dem in §. 12. gelehrteten Verfahren, den Collimationsfehler zu bestimmen, nicht entbehrt werden kann, durchaus alle Correctionsschrauben an dem Sextanten wegzulassen, und überdies ihr Hauptaugenmerk auf eine recht solide Bauart des Instruments zu richten, zurückkehrten, indem man nur dann sich wird versichert halten können, dass die nach der im Vorhergehenden entwickelten Methode bestimmten Fehler des Sextanten, so wie auch der Collimationsfehler und der Winkel θ , constant bleiben, und also auch bei jedem gemessenen Winkel nach der Formel 175. mit denselben einmal bestimmten Werthen in Rechnung gebracht werden können. *Ramsden* versichert, dass mehrere von ihm nach seiner Methode verfertigte Sextanten, nachdem sie nach Indien und wieder zurück gebracht worden waren, noch denselben Indexfehler hatten, wie man ihn vor der Abreise gefunden hatte. Freilich hat nicht ein Jeder Zeit, Lust und auch Geschick genug, die Fehler seines Sextanten nach den obigen Methoden auszumitteln und dann jeden gemessenen Winkel wegen derselben besonders zu corrigiren, was namentlich von Schiffen, die den Sextanten doch am meisten gebrauchen, gelten dürfte. Ich habe aber auch bei der oben gemachten Bemerkung bloss den wahrhaft wissenschaftlichen Gebrauch dieses schönen Instruments im Auge gehabt. Der gewöhnliche Schiffer wird gewiss den Sextanten vor jeder einzelnen Beobachtung immer nach den ihm einmal geläufigen Methoden berichtigen, und dann darf natürlich keine der jetzt gewöhnlichen Correctionsschrauben fehlen. Ob freilich die durch die bei den Sextanten nicht zu vermeidende Excentricität herbeigeführten Fehler nicht vielleicht so gross sind, dass man durch die obige Methode, die Fehler zu bestimmen, bei wirklicher Anwendung derselben überhaupt kein sicheres Resultat erhält, vermag ich nicht zu entscheiden.

15.

Bemerkt mag noch werden, dass, wenn man neben dem Sextanten noch mit einem andern genauen Winkelmesser, etwa mit einem Theodoliten versehen ist, man sich auch leicht Gleichungen bilden kann, mittelst welcher sich die Fehler des Sextanten bestimmen lassen. Misst man nämlich drei Winkel mit dem Sextanten und auch mit dem Theodoliten, mit letzterem am Besten durch Repetition; so erhält man, vorausgesetzt, dass der Theodolit die Winkel fehlerfrei giebt, durch die erste Messung drei Werthe von W , und durch die zweite die entsprechenden Werthe von W_1 , und kann sich nun mittelst der allgemeinen Gleichung 175. drei Gleichungen bilden, welche zur Be-

*) Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung von *Bohnenberger*. Götting. 1795. S. 147.

stimmung der Grössen x^2 , y^2 , xy , und also auch der Grössen x , y , hinreichend sind. Zu beachten hat man hierbei aber natürlich, dass, weil der Theodolit die auf den Horizont projecirten Winkel giebt, die mit demselben gemessenen Winkel natürlich erst auf die Ebenen, in denen sie mit dem Sextanten gemessen worden sind, reducirt werden müssen, zu welchem Ende man mit dem Höhenkreise des Theodoliten noch die Neigungen der Schenkel der zu bestimmenden Winkel gegen den Horizont messen, und dann nach folgenden Formeln rechnen muss. Die mit dem Theodoliten gemessene horizontale Projection des zu bestimmenden Winkels sey α , die Neigungen der Schenkel des zu bestimmenden Winkels, den wir durch ϕ bezeichnen wollen, gegen den Horizont seyen n und n' ; so ist ϕ offenbar als die eine Seite eines sphärischen Dreiecks zu betrachten, dessen beide andere Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel $90^\circ - n$, $90^\circ - n'$, α sind, so dass nämlich die Seite ϕ dem Winkel α gegenüber steht. Also ist

$$\cos \phi = \cos(90^\circ - n) \cos(90^\circ - n') + \sin(90^\circ - n) \sin(90^\circ - n') \cos \alpha,$$

d. i.

$$178. \cos \phi = \sin n \sin n' + \cos n \cos n' \cos \alpha.$$

Berechnet man nun den Hülfswinkel θ mittelst der Formel

$$179. \tan \theta = \frac{\tan n}{\cos \alpha};$$

so ist

$$\cos \phi = \frac{\sin n}{\tan \theta} (\cos n' + \sin n' \tan \theta),$$

d. i.

$$\cos \phi = \frac{\sin n}{\sin \theta} (\cos \theta \cos n' + \sin \theta \sin n');$$

also

$$180. \cos \phi = \frac{\sin n \cos(\theta - n')}{\sin \theta}.$$

Sind n und n' , wie es meistens der Fall seyn wird, sehr kleine Grössen; so erhält man aus der Gleichung 178. mit Vernachlässigung der Grössen vierter Ordnung

$$\cos \phi = nn' + (1 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n'^2) \cos \alpha,$$

oder

$$\begin{aligned} & \cos \phi - \cos \alpha \\ &= nn' (\cos \frac{1}{2} \alpha^2 + \sin \frac{1}{2} \alpha^2) - \frac{1}{2} (n^2 + n'^2) (\cos \frac{1}{2} \alpha^2 - \sin \frac{1}{2} \alpha^2) \\ &= -\frac{1}{2} (n^2 - 2nn' + n'^2) \cos \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} (n^2 + 2nn' + n'^2) \sin \frac{1}{2} \alpha^2 \\ &= -\frac{1}{2} (n - n')^2 \cos \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} (n + n')^2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2. \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} \cos \phi - \cos \alpha &= 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \phi) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \phi) \\ &= 2 \sin (\alpha - \frac{1}{2} (\alpha - \phi)) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \phi) \\ &= 2 \{ \sin \alpha \cos \frac{1}{2} (\alpha - \phi) - \cos \alpha \sin \frac{1}{2} (\alpha - \phi) \} \sin \frac{1}{2} (\alpha - \phi) \\ &= \sin \alpha \sin (\alpha - \phi) - 2 \cos \alpha \sin \frac{1}{2} (\alpha - \phi)^2, \end{aligned}$$

und folglich, da unter den gemachten Voraussetzungen der absolute Werth von $\alpha - \phi$ sehr klein ist, näherungsweise

$$\cos \phi - \cos \alpha = (\alpha - \phi) \sin \alpha - \frac{1}{2} (\alpha - \phi)^2 \cos \alpha.$$

Also ist nach dem Obigen

$$(\alpha - \phi) \sin \alpha = \frac{1}{2} (\alpha - \phi)^2 \cos \alpha - \frac{1}{2} (n - n')^2 \cos \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} (n + n')^2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2,$$

oder

oder näherungsweise

$$(a - \phi) \sin a = -\frac{1}{2}(n - n')^2 \cos \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(n + n')^2 \sin \frac{1}{2}a^2,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit

$$\sin a = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a$$

dividirt,

$$a - \phi = -\frac{1}{4}(n - n')^2 \cot \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(n + n')^2 \tan \frac{1}{2}a,$$

oder

$$181. \quad \phi = a + \left(\frac{n - n'}{2}\right)^2 \cot \frac{1}{2}a - \left(\frac{n + n'}{2}\right)^2 \tan \frac{1}{2}a.$$

Sollen a, n, n', ϕ in Secunden ausgedrückt seyn; so muss man setzen

$$182. \quad \phi = a + \left\{ \left(\frac{n - n'}{2}\right)^2 \cot \frac{1}{2}a - \left(\frac{n + n'}{2}\right)^2 \tan \frac{1}{2}a \right\} \sin 1''.$$

Könnte man von der senkrechten Stellung des grossen, und also, wenn man den Collimationsfehler nach der Methode, von welcher oben ausführlich die Rede gewesen ist, bestimmt hat, auch von der senkrechten Stellung des kleinen Spiegels auf der Sextantenebene versichert seyn *); so brauchte man, um die Neigung i der Visirlinie gegen die Sextantenebene zu bestimmen, bloss einen Winkel W mit dem Sextanten und den entsprechenden Winkel W_1 mit dem Theodoliten zu messen, weil unter der gemachten Voraussetzung nach 83.

$$\sin \frac{1}{2}W_1 = \cos i \sin \frac{1}{2}W;$$

folglich

$$183. \quad \cos i = \frac{\sin \frac{1}{2}W_1}{\sin \frac{1}{2}W}$$

ist, mittelst welcher Formel sich i leicht berechnen lässt.

16.

Die Fehler des Spiegelsextanten sind schon früher von *Bohnenberger* in seiner schon oben erwähnten *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung*, und von *Encke* in einer im *Berliner astronomischen Jahrbuche für 1830* befindlichen, ebenfalls schon oben erwähnten trefflichen Abhandlung untersucht worden. Die von *Encke* mittelst der sphärischen Trigonometrie entwickelte ganz allgemeine Formel ist der Form nach von den oben entwickelten Formeln verschieden; indess können diese Formeln mit der von *Encke* gefundenen Formel zu völliger Übereinstimmung gebracht werden, wie nun noch gezeigt werden soll.

Nach 169. ist, wenn wir der Kürze wegen

$$F = \cos 2i_1 \cos 2i_2 - \sin 2i_1 \sin 2i_2 \cos \frac{1}{2}W - \cos W,$$

$$G = \cos 2i_1 \cos 2i_2 - \sin 2i_1 \sin 2i_2 \cos \frac{1}{2}W - \cos W$$

$$+ 2 \cos i_1^2 \cos \theta \cos (W - \theta)$$

$$+ 2 \cos i_2^2 \cos (\frac{1}{2}W - \theta) \cos (\frac{1}{2}W + \theta)$$

$$+ 4 \cos i_1 \cos i_2 \cos \theta (\sin i_1 \sin i_2 - \cos i_1 \cos i_2 \cos \frac{1}{2}W) \cos (\frac{1}{2}W - \theta),$$

*) Bekanntlich giebt es ein sehr einfaches Verfahren, den grossen Spiegel mit grosser Genauigkeit senkrecht auf die Sextantenebene zu stellen.

$$H = 4 \sin i \cos i \sin i_1 \sin i_2 \sin \frac{1}{2} W \{ \sin i_1 \cos i_2 \sin \theta - \cos i_1 \sin i_2 \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \}$$

setzen,

$$184. \cos W_1 - \cos W = F - \cos i^2 \cdot G + H.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} F &= (1 - 2 \sin i_1^2)(1 - 2 \sin i_2^2) \\ &\quad - 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \cos \frac{1}{2} W - 1 + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &= -2 \sin i_1^2 - 2 \sin i_2^2 + 4 \sin i_1^2 \sin i_2^2 \\ &\quad - 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \cos \frac{1}{2} W + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &= -2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \\ &\quad - 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \cos \frac{1}{2} W + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &= -2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 + 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ &\quad - 2 (\sin i_1 \cos i_2 + \cos i_1 \sin i_2 \cos \frac{1}{2} W)^2 \\ &= 2 (1 - \cos i_1^2 \sin i_2^2) \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &\quad - 2 (\sin i_1 \cos i_2 + \cos i_1 \sin i_2 \cos \frac{1}{2} W)^2 \\ &= 2 \cos i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 2 (\sin i_1 \cos i_2 + \cos i_1 \sin i_2 \cos \frac{1}{2} W)^2 \\ &\quad + 2 \sin i_1^2 \sin i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} G &= -2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \\ &\quad - 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \cos \frac{1}{2} W + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &\quad + 2 \cos i_1^2 \cos \theta^2 \cos W + 2 \cos i_1^2 \sin \theta \cos \theta \sin W \\ &\quad + 2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 - 2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &\quad + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W \\ &\quad + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \\ &\quad - 4 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ &\quad - 4 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \cos \frac{1}{2} W. \end{aligned}$$

Weil aber

$$\begin{aligned} &-4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \cos \frac{1}{2} W \\ &+ 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W \\ &+ 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \\ &= -4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta^2 \cos \frac{1}{2} W \\ &\quad + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \\ &= 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{1}{2} W \cos \theta \\ - \cos \frac{1}{2} W \sin \theta \end{array} \right\} \\ &= 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \end{aligned}$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} G &= -2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &\quad + 2 \cos i_1^2 \cos \theta^2 \cos W + 2 \cos i_1^2 \sin \theta \cos \theta \sin W \\ &\quad + 2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 - 2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &\quad - 4 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ &\quad - 4 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \cos \frac{1}{2} W \\ &\quad + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\cos W = \cos \frac{1}{2} W^2 - \sin \frac{1}{2} W^2$$

und

$$\begin{aligned} & 2 \cos i_1^2 \sin \theta \cos \theta \sin W \\ & - 4 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \cos \frac{1}{2} W \\ & = 4 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \cos \frac{1}{2} W . \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} G = & - 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & + 2 \cos i_1^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 - 2 \cos i_1^2 \cos \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & + 2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 - 2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & - 4 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ & + 4 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \cos \frac{1}{2} W \\ & + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta) . \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & 4 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ = & 2 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 + 2 \cos i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ = & 2 \cos i_1^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ & + 2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 - 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} G = & - 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & - 2 \cos i_1^2 \cos \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \\ & + 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 + 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ & + 4 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{1}{2} W \cos \frac{1}{2} W , \end{aligned}$$

und folglich, wenn man auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Grösse

$$\begin{aligned} 0 = & 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \cos \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & + 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ & - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \cos \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \end{aligned}$$

addirt,

$$\begin{aligned} G = & - 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 + 2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & - 2 \cos i_1^2 \cos \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & + 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \cos \theta^2 \\ & + 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 \cos \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 + 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin \theta^2 \cos \frac{1}{2} W^2 \\ & - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin (\frac{1}{2} W - \theta)^2 \\ & + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta) . \end{aligned}$$

Setzt man nun hierin überall

$$\cos \theta^2 = 1 - \sin \theta^2 , \quad \cos \frac{1}{2} W^2 = 1 - \sin \frac{1}{2} W^2 ,$$

und hebt die gleichen Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen auf; so erhält man

$$\begin{aligned} G = & 2 \sin i_1^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & - 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 - 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & + 2 (\cos i_1^2 - \cos i_2^2 + \sin i_1^2 \cos i_2^2 - \cos i_1^2 \sin i_2^2) \sin \theta^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ & - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin (\frac{1}{2} W - \theta)^2 \\ & + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta) , \end{aligned}$$

oder, weil

$$\begin{aligned} & \cos i_1^2 - \cos i_2^2 + \sin i_1^2 \cos i_2^2 - \cos i_1^2 \sin i_2^2 \\ &= \cos i_1^2 \cos i_2^2 - \cos i_1^2 \cos i_2^2 = 0 \end{aligned}$$

ist,

$$\begin{aligned} G = & 2 \sin i_1^2 \sin i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 \\ & - 2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin (\frac{1}{2} W - \theta)^2 \\ & + 4 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta) . \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} & F - \cos i^2 \cdot G \\ &= 2 \cos i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 2 (\sin i_1 \cos i_2 + \cos i_1 \sin i_2 \cos \frac{1}{2} W)^2 \\ &+ 2 \sin i^2 \sin i_1^2 \sin i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &+ 2 \cos i^2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 \\ &+ 2 \cos i^2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin (\frac{1}{2} W - \theta)^2 \\ &- 4 \cos i^2 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta) , \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \cos W_1 - \cos W \\ &= 2 \cos i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 2 (\sin i_1 \cos i_2 + \cos i_1 \sin i_2 \cos \frac{1}{2} W)^2 \\ &+ 2 \cos i^2 \sin i_1^2 \cos i_2^2 \sin \theta^2 \\ &+ 2 \cos i^2 \cos i_1^2 \sin i_2^2 \sin (\frac{1}{2} W - \theta)^2 \\ &+ 2 \sin i^2 \sin i_1^2 \sin i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2 \\ &- 4 \cos i^2 \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \\ &+ 4 \sin i \cos i \sin i_1^2 \sin i_2 \cos i_2 \sin \theta \sin \frac{1}{2} W \\ &- 4 \sin i \cos i \sin i_1 \cos i_1 \sin i_2^2 \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \sin \frac{1}{2} W ; \end{aligned}$$

also, wie sogleich in die Augen fällt,

$$\begin{aligned} & 185. \cos W_1 - \cos W \\ &= 2 \cos i_2^2 \sin \frac{1}{2} W^2 - 2 (\sin i_1 \cos i_2 + \cos i_1 \sin i_2 \cos \frac{1}{2} W)^2 \\ &+ 2 \left\{ \cos i \sin i_1 \cos i_2 \sin \theta - \cos i \cos i_1 \sin i_2 \sin (\frac{1}{2} W - \theta) \right\}^2 \\ &+ \sin i \sin i_1 \sin i_2 \sin \frac{1}{2} W \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & 186. \cos W_1 - \cos W \\ &= 2 \sin i_2^2 (\cot i_2 \sin \frac{1}{2} W)^2 \\ &- 2 \sin i_1^2 \sin i_2^2 (\cot i_2 + \cot i_1 \cos \frac{1}{2} W)^2 \\ &+ 2 \cos i^2 \sin i_1^2 \sin i_2^2 \{ \cot i_2 \sin \theta - \cot i_1 \sin (\frac{1}{2} W - \theta) + \tan g i \sin \frac{1}{2} W \}^2 , \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & 187. \sin \frac{1}{2} (W_1 - W) \sin \frac{1}{2} (W_1 + W) \\ &= - \sin i_2^2 (\cot i_2 \sin \frac{1}{2} W)^2 \\ &+ \sin i_1^2 \sin i_2^2 (\cot i_2 + \cot i_1 \cos \frac{1}{2} W)^2 \\ &- \cos i^2 \sin i_1^2 \sin i_2^2 \{ \cot i_2 \sin \theta - \cot i_1 \sin (\frac{1}{2} W - \theta) + \tan g i \sin \frac{1}{2} W \}^2 . \end{aligned}$$

Diese Formel stimmt ganz mit dem von *Encke* a. a. O. S. 290 gegebenen Ausdrucke überein, wie man auf der Stelle übersieht, wenn man nur für die hier gebrauchten Zeichen die von *Encke* angewandten einführt. Drücken wir nämlich unsere Symbole $W, W_1, \theta, i, i_1, i_2$ durch die von *Encke* angewandten Zeichen $\alpha, \alpha', \beta, i, k, l$ aus; so ist, wobei man nur gehörig zu beachten hat, was *Encke* S. 284 und S. 287 über die Be-

deutung von k und l sagt, $W=2a$, $W_1=2a'$ oder $\frac{1}{2}W=a$, $\frac{1}{2}W_1=a'$, $\theta=\beta$, $i=i$, $i_1=90^\circ-k$, $i_2=90^\circ+l$, und folglich nach 187.

$$\begin{aligned} & \sin(a'-a) \sin(a'+a) \\ = & -\cos l^2 (\tan l \sin a)^2 \\ & + \cos k^2 \cos l^2 (-\tan l + \tan k \cos a)^2 \\ & - \cos i^2 \cos k^2 \cos l^2 \{-\tan l \sin \beta - \tan k \sin(a-\beta) + \tan i \sin a\}^2, \end{aligned}$$

oder, was ganz dasselbe ist,

$$\begin{aligned} & \sin(a'-a) \sin(a'+a) \\ = & -\cos l^2 (\tan l \sin a)^2 \\ & + \cos k^2 \cos l^2 (\tan l - \tan k \cos a)^2 \\ & - \cos i^2 \cos k^2 \cos l^2 \{\tan l \sin \beta + \tan k \sin(a-\beta) - \tan i \sin a\}^2. \end{aligned}$$

Dies ist aber genau die von *Encke* gefundene Formel.

Setzt man in der Formel 185. $i_1=90^\circ$, $i_2=90^\circ$; so erhält man

$$\cos W_1 = \cos W + 2 \sin i^2 \sin \frac{1}{2} W^2$$

oder

$$\begin{aligned} \cos W_1 &= \cos W + \sin i^2 (1 - \cos W) \\ &= \sin i^2 + (1 - \sin i^2) \cos W = \sin i^2 + \cos i^2 \cos W, \end{aligned}$$

ganz übereinstimmend mit 82.

Setzt man in der Formel 185. $i=0$, $i_2=90^\circ$; so erhält man

$$\cos W_1 = \cos W - 2 \cos i_1^2 \{\cos \frac{1}{2} W^2 - \sin(\frac{1}{2} W - \theta)^2\}.$$

Aber

$$\begin{aligned} & \cos \frac{1}{2} W^2 - \sin(\frac{1}{2} W - \theta)^2 \\ = & \{\cos \frac{1}{2} W + \sin(\frac{1}{2} W - \theta)\} \{\cos \frac{1}{2} W - \sin(\frac{1}{2} W - \theta)\} \\ = & \{\cos \frac{1}{2} W + \cos(90^\circ - (\frac{1}{2} W - \theta))\} \{\cos \frac{1}{2} W - \cos(90^\circ - (\frac{1}{2} W - \theta))\} \\ = & 2 \cos \frac{1}{2} (90^\circ + \theta) \cos \frac{1}{2} \{90^\circ - (W - \theta)\} \\ & \times 2 \sin \frac{1}{2} (90^\circ + \theta) \sin \frac{1}{2} \{90^\circ - (W - \theta)\} \\ = & \sin(90^\circ + \theta) \sin \{90^\circ - (W - \theta)\} = \cos \theta \cos(W - \theta), \end{aligned}$$

und folglich

$$\cos W_1 = \cos W - 2 \cos i_1^2 \cos \theta \cos(W - \theta),$$

ganz übereinstimmend mit 113.

Setzt man endlich in der Formel 185. $i=0$, $i_1=90^\circ$; so erhält man

$$\begin{aligned} \cos W_1 &= \cos W + 2 \cos i_2^2 (\sin \frac{1}{2} W^2 - 1 + \sin \theta^2) \\ &= \cos W + 2 \cos i_2^2 (\sin \theta^2 - \cos \frac{1}{2} W^2). \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} \sin \theta^2 - \cos \frac{1}{2} W^2 &= (\sin \theta + \cos \frac{1}{2} W) (\sin \theta - \cos \frac{1}{2} W) \\ = & \{\sin \theta + \sin(90^\circ - \frac{1}{2} W)\} \{\sin \theta - \sin(90^\circ - \frac{1}{2} W)\} \\ = & -2 \sin \frac{1}{2} \{90^\circ - (\frac{1}{2} W - \theta)\} \cos \frac{1}{2} \{90^\circ - (\frac{1}{2} W + \theta)\} \\ & \times 2 \sin \frac{1}{2} \{90^\circ - (\frac{1}{2} W + \theta)\} \cos \frac{1}{2} \{90^\circ - (\frac{1}{2} W - \theta)\} \\ = & -\sin \{90^\circ - (\frac{1}{2} W - \theta)\} \sin \{90^\circ - (\frac{1}{2} W + \theta)\} \\ = & -\cos(\frac{1}{2} W - \theta) \cos(\frac{1}{2} W + \theta), \end{aligned}$$

und folglich

$$\cos W_1 = \cos W - 2 \cos^2 \cos(\tfrac{1}{2}W - \theta) \cos(\tfrac{1}{2}W + \theta),$$

wieder ganz übereinstimmend mit 134.

Man sieht also, dass *Enckes* Formel in den drei speciellen Fällen, wenn $i_1 = 90^\circ$, $i_2 = 90^\circ$; $i = 0$, $i_2 = 90^\circ$; $i = 0$, $i_1 = 90^\circ$ ist, ganz zu denselben von uns oben für diese drei Fälle gefundenen Formeln führt.

Für $i_1 + i_2 = \pi$ wird die Gleichung 187.

$$\begin{aligned} & \sin \tfrac{1}{2}(W_1 - W) \sin \tfrac{1}{2}(W_1 + W) \\ &= -\sin i_1^2 (\cot i_1 \sin \tfrac{1}{2}W)^2 \\ & \quad + \sin i_1^4 (-\cot i_1 + \cot i_1 \cos \tfrac{1}{2}W)^2 \\ & \quad - \cos i_1^2 \sin i_1^4 \{ -\cot i_1 \sin \theta - \cot i_1 \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) + \tan i \sin \tfrac{1}{2}W \}^2 \\ &= -\sin i_1^2 \cot i_1^2 \sin \tfrac{1}{2}W^2 \\ & \quad + \sin i_1^4 \cot i_1^2 (1 - \cos \tfrac{1}{2}W)^2 \\ & \quad - \cos i_1^2 \sin i_1^4 \{ \cot i_1 (\sin \theta + \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta)) - \tan i \sin \tfrac{1}{2}W \}^2 \\ &= -4 \sin i_1^2 \cot i_1^2 \sin \tfrac{1}{4}W^2 \cos \tfrac{1}{4}W^2 \\ & \quad + 4 \sin i_1^4 \cot i_1^2 \sin \tfrac{1}{4}W^4 \\ & \quad - \cos i_1^2 \sin i_1^4 \{ \cot i_1 (\sin \theta + \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta)) - \tan i \sin \tfrac{1}{2}W \}^2 \\ &= -4 \cos i_1^2 \sin \tfrac{1}{4}W^2 \{ \cos \tfrac{1}{4}W^2 - \sin i_1^2 \sin \tfrac{1}{4}W^2 \} \\ & \quad - \cos i_1^2 \sin i_1^4 \{ \cot i_1 (\sin \theta + \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta)) - \tan i \sin \tfrac{1}{2}W \}^2. \end{aligned}$$

Weil nun bekanntlich

$$\cos \tfrac{1}{4}W^2 = \cos \tfrac{1}{2}W + \sin \tfrac{1}{4}W^2,$$

und

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin(\tfrac{1}{2}W - \theta) &= \sin \tfrac{1}{2}W \cos \theta + (1 - \cos \tfrac{1}{2}W) \sin \theta \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{4}W \{ \cos \tfrac{1}{4}W \cos \theta + \sin \tfrac{1}{4}W \sin \theta \} = 2 \sin \tfrac{1}{4}W \cos(\tfrac{1}{4}W - \theta) \end{aligned}$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} & 187.* \sin \tfrac{1}{2}(W_1 - W) \sin \tfrac{1}{2}(W_1 + W) \\ &= 4 \sin \tfrac{1}{4}W^2 \left\{ \begin{aligned} & -\cos i_1^2 (\cos \tfrac{1}{2}W + \cos i_1^2 \sin \tfrac{1}{4}W^2) \\ & -\cos i_1^2 \sin i_1^4 \{ \cot i_1 \cos(\tfrac{1}{4}W - \theta) - \tan i \cos \tfrac{1}{4}W \}^2 \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Auch diese Formel stimmt ganz mit der von *Encke* a. a. O. S. 292. gegebenen Formel überein.

Setzt man nun

$\sin \tfrac{1}{2}(W_1 - W) = \tfrac{1}{2}(W_1 - W)$, $\sin \tfrac{1}{2}(W_1 + W) = \sin W$,
und bleibt, indem man zugleich wie in §. 11. $i = x$, $i_1 = \tfrac{1}{2}\pi - y$ setzt, bei Gliedern der zweiten Ordnung stehen; so erhält man

$$= \frac{4 \sin \tfrac{1}{4}W^2}{\sin W} \left\{ -y^2 \cos \tfrac{1}{2}W - (y \cos(\tfrac{1}{4}W - \theta) - x \cos \tfrac{1}{4}W)^2 \right\},$$

woraus sich ferner leicht die Formel

$$\begin{aligned} & 187.** \quad W_1 - W \\ &= -2 \tan \tfrac{1}{4}W \{ y^2 + \sec \tfrac{1}{2}W (y \cos(\tfrac{1}{4}W - \theta) - x \cos \tfrac{1}{4}W)^2 \} \end{aligned}$$

ergiebt, welche ebenfalls ganz mit der von *Encke* a. a. O. S. 292 gegebenen Näherungsformel übereinstimmt. Auch lässt sich die völlige Übereinstimmung dieser Formel, wenn man sie nur noch so darstellt, dass x, y, W, W_1 in Secunden ausgedrückt sind, mit der Formel 172. leicht nachweisen.

17.

Schon im vorigen Paragraphen ist bemerkt worden, dass auch *Bohnenberger* in seiner *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung* die Theorie des Spiegelsextanten zu entwickeln versucht hat. Eine ganz allgemeine Formel giebt *Bohnenberger* nicht, sondern betrachtet bloss die drei speciellen Fälle, wenn $i_1 = 90^\circ, i_2 = 90^\circ; i = 0, i_2 = 90^\circ; i = 0, i_1 = 90^\circ$ ist. *Bohnenbergers* Theorie ist aber nach meiner Überzeugung völlig unrichtig, welches darin seinen Grund hat, dass *Bohnenberger* eine ganz falsche Ansicht von dem von der Alhidade angegebenen, wegen des Collimationsfehlers verbesserten Winkel, welcher oben immer durch W bezeichnet worden ist, hat. Nach *Bohnenbergers* Ansicht ist nämlich, wie namentlich aus der Behandlung seines ersten und dritten Falls, S. 121 und S. 131 des angeführten Werkes, wenn $i_1 = 90^\circ, i_2 = 90^\circ$ oder $i = 0, i_2 = 90^\circ$ ist, unzweideutig und mit völliger Deutlichkeit hervorgeht, W jederzeit die Projection des zu messenden Winkels auf der Ebene des Sextanten. Nach unserer Ansicht ist dagegen W jederzeit der doppelte spitze Winkel, unter welchem die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Ebene des Sextanten gegen einander geneigt sind, oder $\frac{1}{2}W$ ist dieser Winkel selbst. Dass *Encke* dieselbe Ansicht seiner Untersuchung zum Grunde legt, geht schon aus der völligen Übereinstimmung seiner Formeln mit den unsrigen hervor, erhellet aber auch aus dem, was *Encke* a. a. O. S. 288 sagt. Er sagt nämlich an diesem Orte, dass W (bei ihm $2a$) der doppelte spitze Winkel sey, unter welchem die Projectionen zweier auf die Spiegelebenen errichteter Perpendikel auf der Sextantenebene gegen einander geneigt sind. Dass aber dieser Winkel dem von den Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene eingeschlossenen spitzen Winkel jederzeit gleich ist, erhellet mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung ohne alle Schwierigkeit. Sehr auffallend ist es daher, dass *Encke* a. a. O. S. 292 die Ergebnisse seiner Untersuchung für völlig übereinstimmend mit den von *Bohnenberger* gegebenen Vorschriften erklärt. In der That findet auch eine solche völlige Übereinstimmung durchaus nicht Statt, wie wir jetzt bloss an *Bohnenbergers* drittem Falle, wenn $i = 0, i_2 = 90^\circ$ ist, zeigen wollen. In diesem Falle ergiebt sich nämlich, wie oben in §. 16. gezeigt worden ist, aus *Enckes* allgemeiner Formel die Formel

$$188. \cos W_1 = \cos W - 2\cos i_1^2 \cos \theta \cos(W - \theta).$$

Übersetzen wir dagegen die von *Bohnenberger* a. a. O. S. 131 gegebenen Vorschriften in unsere Zeichen; so erhalten wir Folgendes. Man berechne den Winkel ϕ mittelst der Formel

$$189. \sin \phi = \cos \theta \sin 2i_1.$$

Dann ist W_1 die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, dessen Catheten die Winkel ϕ und W sind, und folglich nach Principien der sphärischen Trigonometrie

$$190. \cos W_1 = \cos \phi \cos W,$$

d. i. nach 189.

$$191. \cos W_1 = \cos W \cdot \sqrt{1 - (\cos \theta \sin 2i_1)^2}$$

oder

$$192. \cos W_1 = \cos W - \cos W \cdot \{1 - \sqrt{1 - (\cos \theta \sin 2i_1)^2}\}.$$

Sollte diese Formel mit der Formel 188. übereinstimmen; so müsste

$$\cos W \cdot \{1 - \sqrt{1 - (\cos \theta \sin 2i_1)^2}\} = 2 \cos i_1^2 \cos \theta \cos (W - \theta),$$

also

$$\frac{1 - \sqrt{1 - (\cos \theta \sin 2i_1)^2}}{2 \cos i_1^2 \cos \theta} = \frac{\cos (W - \theta)}{\cos W},$$

oder

$$\tan W = \frac{1 - 2 \cos i_1^2 \cos \theta^2 - \sqrt{1 - (\cos \theta \sin 2i_1)^2}}{\cos i_1^2 \sin 2\theta}$$

seyn, welches schon deshalb ungereimt ist, weil $\tan W$ eine *veränderliche*, die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens dagegen eine endliche völlig bestimmte *constante* Grösse ist. Man sieht hieraus also, dass die aus der ganz richtigen allgemeinen Formel *Enckes* gezogenen Resultate durchaus nicht mit den von *Bohnenberger* gegebenen Vorschriften im Einklange stehen. Und wenn *Encke* dennoch eine völlige Übereinstimmung zwischen seiner und *Bohnenbergers* Theorie gefunden haben will; so liegt der Grund hiervon ohne Zweifel bloss darin, dass er nur die aus beiden Theorien fließenden *Näherungsformeln*, nicht die *völlig genauen Formeln*, auf die es doch hierbei einzig und allein ankommt, in Betrachtung gezogen hat. *Enckes* Theorie ist richtig, die Theorie *Bohnenbergers* ist dagegen nach meiner Überzeugung ganz falsch und völlig verfehlt. Nur in dem Falle, wenn $i_1 = 90^\circ$, $i_2 = 90^\circ$ ist, d. h. wenn beide Spiegelebenen auf der Sextantenebene senkrecht stehen, ist die von *Bohnenberger* gegebene Formel richtig. Dies ist aber kein Beweis für die Richtigkeit seiner Theorie im Allgemeinen, sondern hat seinen Grund darin, dass in dem in Rede stehenden speciellen Falle die Projection des zu messenden Winkels auf der Ebene des Sextanten dem doppelten Neigungswinkel der Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene gegen einander gleich ist, wie nachher noch besonders gezeigt werden soll. Dass die von *Bohnenberger* in seiner ziemlich allgemein verbreiteten *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung* gelieferte Theorie des Spiegelsextanten, wie ich im Obigen deutlich gezeigt zu haben glaube, völlig falsch und verfehlt ist, indem dieselbe auf falschen Principien beruht, ist meines Wissens wenigstens noch nicht öffentlich ausgesprochen worden, welches gewiss merkwürdig genug ist, da *Bohnenbergers* Buch schon 1795 erschienen ist, und sich gewiss in Vieler Händen befindet, was es seiner übrigen Vorzüge wegen auch vollkommen verdient.

18.

Der weitem und völligen Aufklärung dieses Gegenstandes wird es gewiss förderlich seyn, wenn ich, wie nun noch geschehen soll, den Unterschied zwischen dem doppelten Neigungswinkel der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene gegen einander, für welchen wir die im Obigen gebrauchte Bezeichnung W auch jetzt beibehalten wollen, und der Projection des zu messenden wahren Winkels W_1 auf der Ebene des Sextanten, welche von nun an durch W' bezeichnet werden soll, auf dem Wege des Calculs entwickele.

Nach 152. sind

$$193. \begin{cases} x = (a \cos \frac{1}{2} W - b \sin \frac{1}{2} W)z + \alpha', \\ y = (a \sin \frac{1}{2} W + b \cos \frac{1}{2} W)z + \beta' \end{cases}$$

die Gleichungen der Visirlinie in Bezug auf das secundäre System. Also ist

$$x = \alpha'$$

$$\frac{x - a'}{y - \beta'} = \frac{a \cos \frac{1}{2} W - b \sin \frac{1}{2} W}{a \sin \frac{1}{2} W + b \cos \frac{1}{2} W}$$

oder

$$194. \quad y - \beta' = \frac{a \sin \frac{1}{2} W + b \cos \frac{1}{2} W}{a \cos \frac{1}{2} W - b \sin \frac{1}{2} W} (x - a')$$

die Gleichung der Projection der Visirlinie auf der Ebene der xy , d. i. auf der Ebene des Sextanten.

Nach 156. sind ferner

$$195. \quad x = a_3 z + a_3, \quad y = b_3 z + \beta_3$$

die Gleichungen des von dem Objecte zur Rechten auf den grossen Spiegel fallenden Strahls in Bezug auf das secundäre System. Also ist

$$\frac{x - a_3}{y - \beta_3} = \frac{a_3}{b_3},$$

oder

$$196. \quad y - \beta_3 = \frac{b_3}{a_3} (x - a_3)$$

die Gleichung der Projection des in Rede stehenden Strahls auf der Ebene der xy , d. i. auf der Ebene des Sextanten.

Folglich ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$\cos W' = \pm \frac{(a \cos \frac{1}{2} W - b \sin \frac{1}{2} W) a_3 + (a \sin \frac{1}{2} W + b \cos \frac{1}{2} W) b_3}{\sqrt{(a_3^2 + b_3^2) \{ (a \cos \frac{1}{2} W - b \sin \frac{1}{2} W)^2 + (a \sin \frac{1}{2} W + b \cos \frac{1}{2} W)^2 \}}},$$

d. i.

$$197. \quad \cos W' = \pm \frac{(a \cos \frac{1}{2} W - b \sin \frac{1}{2} W) a_3 + (a \sin \frac{1}{2} W + b \cos \frac{1}{2} W) b_3}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a_3^2 + b_3^2)}},$$

Nach 164. ist aber

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \cot^2 i (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \cot^2 i, \\ a \cos \frac{1}{2} W - b \sin \frac{1}{2} W &= \cot i \sin(\frac{1}{2} W - \theta), \\ a \sin \frac{1}{2} W + b \cos \frac{1}{2} W &= -\cot i \cos(\frac{1}{2} W - \theta). \end{aligned}$$

Also ist

$$198. \quad \cos W' = \pm \frac{a_3 \sin(\frac{1}{2} W - \theta) - b_3 \cos(\frac{1}{2} W - \theta)}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}},$$

woraus sich leicht

$$\sin W'^2 = \frac{\{a_3 \cos(\frac{1}{2} W - \theta) + b_3 \sin(\frac{1}{2} W - \theta)\}^2}{a_3^2 + b_3^2},$$

$$\cos W'^2 = \frac{\{a_3 \sin(\frac{1}{2} W - \theta) - b_3 \cos(\frac{1}{2} W - \theta)\}^2}{a_3^2 + b_3^2},$$

also

$$\tan W' = \left\{ \frac{a_3 \cos(\frac{1}{2} W - \theta) + b_3 \sin(\frac{1}{2} W - \theta)}{a_3 \sin(\frac{1}{2} W - \theta) - b_3 \cos(\frac{1}{2} W - \theta)} \right\}^2,$$

und folglich

$$199. \quad \tan W' = \pm \frac{a_3 \cos(\frac{1}{2}W - \theta) + b_3 \sin(\frac{1}{2}W - \theta)}{a_3 \sin(\frac{1}{2}W - \theta) - b_3 \cos(\frac{1}{2}W - \theta)},$$

d. i. nach 157.

$$200. \quad \tan W' = \pm \frac{a_2 \cos(\frac{1}{2}W - \theta) - (\sin 2i_2 - b_2 \cos 2i_2) \sin(\frac{1}{2}W - \theta)}{a_2 \sin(\frac{1}{2}W - \theta) + (\sin 2i_2 - b_2 \cos 2i_2) \cos(\frac{1}{2}W - \theta)}$$

ergiebt,

Führt man nun die aus §. 9. bekannten Ausdrücke von a_2 und b_2 in diese Formel ein, und setzt der Kürze wegen

$$201. \quad T = \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos i \sin \theta \cos \frac{1}{2}W \\ + (\sin i \sin 2i_1 - \cos i \cos \theta \cos 2i_1) \sin \frac{1}{2}W \end{array} \right\} \\ - \sin(\frac{1}{2}W - \theta) \left\{ \begin{array}{l} \sin i (\cos 2i_1 \sin 2i_2 + \sin 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2}W) \\ + \cos i \cos \theta (\sin 2i_1 \sin 2i_2 - \cos 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2}W) \\ - \cos i \sin \theta \cos 2i_2 \sin \frac{1}{2}W \end{array} \right\},$$

$$202. \quad T' = \sin(\frac{1}{2}W - \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos i \sin \theta \cos \frac{1}{2}W \\ + (\sin i \sin 2i_1 - \cos i \cos \theta \cos 2i_1) \sin \frac{1}{2}W \end{array} \right\} \\ + \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \left\{ \begin{array}{l} \sin i (\cos 2i_1 \sin 2i_2 + \sin 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2}W) \\ + \cos i \cos \theta (\sin 2i_1 \sin 2i_2 - \cos 2i_1 \cos 2i_2 \cos \frac{1}{2}W) \\ - \cos i \sin \theta \cos 2i_2 \sin \frac{1}{2}W \end{array} \right\};$$

so erhält man ohne Schwierigkeit

$$203. \quad \tan W' = \pm \frac{T}{T'},$$

wo sich nun noch fragt, welches Zeichen man zu nehmen hat.

Um hierüber zur Gewissheit zu gelangen, setze man $i_1 = i_2 = 90^\circ$; so erhält man

$$\tan W' = \pm \frac{\cos(\frac{1}{2}W - \theta) \sin(\frac{1}{2}W + \theta) + \sin(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W + \theta)}{\sin(\frac{1}{2}W - \theta) \sin(\frac{1}{2}W + \theta) - \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W + \theta)},$$

d. i.

$$\tan W' = \mp \frac{\sin W}{\cos W} = \mp \tan W.$$

Da aber, wie schon aus §. 6. bekannt ist, im vorliegenden Falle $W' = W$, und folglich auch $\tan W' = \tan W$ ist; so sieht man, dass man das untere Zeichen nehmen, und daher

$$204. \quad \tan W' = - \frac{T}{T'}$$

setzen muss.

Zugleich wiederholen wir hier, was schon im vorigen Paragraphen bemerkt worden ist, dass in dem so eben betrachteten Falle, wenn nämlich $i_1 = i_2 = 90^\circ$ ist, *Bohnenbergers* Formel mit unserer Formel 82. völlig übereinstimmt, wovon der Grund unmittelbar aus dem Vorhergehenden erhellt, weil nämlich in diesem Falle $W' = W$ ist.

Für $i = 0$, $i_2 = 90^\circ$ erhält man ohne Schwierigkeit

$$205. \quad \tan W' = - \frac{\sin \theta \cos(W - \theta) - \cos \theta \cos 2i_1 \sin(W - \theta)}{\sin \theta \sin(W - \theta) + \cos \theta \cos 2i_1 \cos(W - \theta)};$$

oder, wenn

$$\cos 2i_1 = 2\cos i_1^2 - 1$$

gesetzt wird,

$$206. \quad \tan W' = \frac{\sin W - 2\cos i_1^2 \cos \theta \sin(W - \theta)}{\cos W - 2\cos i_1^2 \cos \theta \cos(W - \theta)}.$$

Hieraus ergibt sich ferner leicht

$$\sin(W' - W) = 2\cos i_1^2 \cos \theta \sin(W' - W + \theta),$$

und folglich

$$207. \quad \tan(W' - W) = \frac{\cos i_1^2 \sin 2\theta}{1 - 2\cos i_1^2 \cos \theta^2}.$$

Für $i=0$, $i_1=90^\circ$ erhält man eben so leicht

$$208. \quad \tan W' = \frac{\sin W - 2\cos i_2^2 \sin(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W + \theta)}{\cos W - 2\cos i_2^2 \cos(\frac{1}{2}W - \theta) \cos(\frac{1}{2}W + \theta)},$$

also

$$\sin(W' - W) = 2\cos i_2^2 \cos(\frac{1}{2}W + \theta) \sin(W' - \frac{1}{2}W + \theta)$$

oder

$$\sin(W' - W) = 2\cos i_2^2 \cos(\frac{1}{2}W + \theta) \sin\{W' - W + (\frac{1}{2}W + \theta)\},$$

und folglich

$$209. \quad \tan(W' - W) = \frac{\cos i_2^2 \sin(W + 2\theta)}{1 - 2\cos i_2^2 \cos(\frac{1}{2}W + \theta)^2}.$$

In den beiden letzten Fällen können die nach *Bohnenbergers* Ansicht entwickelten Formeln mit unsern Formeln 113. und 134. nicht übereinstimmen, weil die Winkel W und W' nicht einander gleich sind. Auch findet eine solche Übereinstimmung in der That nicht Statt.

Endlich bemerken wir noch, dass, wenn der Kürze wegen

$$210. \quad P' = \cos i,$$

$$211. \quad Q' = \sin i \sin 2i_1 - 2\cos i \cos \theta \cos i_1^2,$$

$$212. \quad R' = (\sin i \cos 2i_1 + \cos i \cos \theta \sin 2i_1) \sin 2i_2 \\ + 2(\sin i \sin 2i_1 - \cos i \cos \theta \cos 2i_1) \cos i_2^2 \cos \frac{1}{2}W \\ - 2\cos i \sin \theta \cos i_2^2 \sin \frac{1}{2}W$$

gesetzt wird, der allgemeine Ausdruck 204. von $\tan W'$ auch leicht auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$213. \quad \tan W' = \frac{P' \sin W + Q' \sin(W - \theta) - R' \sin(\frac{1}{2}W - \theta)}{P' \cos W + Q' \cos(W - \theta) - R' \cos(\frac{1}{2}W - \theta)}.$$

Man erhält diesen Ausdruck nämlich ohne Schwierigkeit, wenn man in den obigen Ausdrücken von T und T' überall

$$\cos 2i_2 = 2\cos i_2^2 - 1,$$

und in einem Falle, um gegen das Ende der Entwicklung die Grösse

$$\cos i \sin \theta \cos(W - \theta) - \cos i \cos \theta \cos 2i_1 \sin(W - \theta)$$

auf die Form

$$\cos i \sin W - 2\cos i \cos \theta \cos i_1^2 \sin(W - \theta)$$

zu bringen, auch

$$\cos 2i_1 = 2\cos i_1^2 - 1$$

setzt.

Aus der Gleichung 213. erhält man ferner leicht die Gleichung

$$0 = P' \sin(W' - W) + Q' \sin(W' - W + \theta) - R' \sin(W' - \frac{1}{2}W + \theta),$$

oder

$$0 = P' \sin(W' - W) + Q' \sin(W' - W + \theta) - R' \sin\{W' - W + (\frac{1}{2}W + \theta)\},$$

und hieraus

$$214. \quad \text{tang}(W' - W) = \frac{R' \sin(\frac{1}{2}W + \theta) - Q' \sin \theta}{P' + Q' \cos \theta - R' \cos(\frac{1}{2}W + \theta)}.$$

Aus den hier für $\text{tang}(W' - W)$ entwickelten Ausdrücken erhellet, wenn man nur wieder $i_1 = \frac{1}{2}\pi - y$, $i_2 = \frac{1}{2}\pi - z$, d. i. $\cos i_1 = \sin y$, $\cos i_2 = \sin z$ setzt, auf der Stelle, dass, wenn die Fehler des Sextanten nur klein sind, die Winkel W und W' nur um äusserst kleine Grössen, nämlich bloss um Grössen der zweiten Ordnung von einander verschieden sind, woraus es erklärlich wird, dass die aus der richtigen Theorie *Enckes* gezogenen Näherungsformeln mit den aus der falschen Theorie *Bohnenbergers* gezogenen Näherungsformeln übereinstimmen, was aber von den genauen Formeln im Allgemeinen durchaus nicht gilt.

VIII.

Zur Krystallographie und analytischen Geometrie.

Erster Beitrag.

1.

In der Krystallographie pflegt man nach dem Vorgange unsers berühmten *Weiss* die Lage einer Ebene durch die drei Punkte zu bestimmen, in denen dieselbe drei angenommene recht- oder schiefwinklige Coordinatenachsen schneidet. Die Lage dieser drei Punkte selbst wird aber durch ihre Entfernungen von dem Anfangspunkte der Coordinaten, d. i. von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei angenommenen Axen, bestimmt. Diese Entfernungen nennt man die *Parameter* der in Rede stehenden Ebene und betrachtet dieselben als positiv oder als negativ, jenachdem sie auf den positiven oder negativen Theilen der entsprechenden Coordinatenachsen liegen. Schneidet die Ebene, deren Lage bestimmt werden soll, die eine oder die andere der drei Coordinatenachsen nicht, und ist also derselben parallel; so hat man den entsprechenden Parameter als unendlich gross zu betrachten. Von ganz besonderer Wichtigkeit für die Krystallographie ist die folgende Aufgabe:

Man soll, wenn die Parameter zweier Ebenen in Bezug auf ein beliebiges schiefwinkliges Coordinatensystem gegeben sind, den von diesen beiden Ebenen eingeschlossenen Winkel bestimmen.

Die Auflösung dieser Aufgabe machen wir zum Gegenstande der folgenden Untersuchung.

2.

Wir denken uns ein rechtwinkliges und ein schiefwinkliges Coordinatensystem von einerlei Anfangspunkte. Die schiefwinkligen Coordinaten sollen durch x, y, z , die rechtwinkligen durch x', y', z' bezeichnet werden. Zwischen diesen Coordinaten haben wir *) die folgenden Gleichungen:

$$1. \begin{cases} x' \cos(xx') + y' \cos(xy') + z' \cos(xz') = x + y \cos(xy) + z \cos(xz), \\ x' \cos(yx') + y' \cos(yy') + z' \cos(yz') = y + x \cos(yx) + z \cos(yz), \\ x' \cos(zx') + y' \cos(zy') + z' \cos(zz') = z + x \cos(zx) + y \cos(yz), \end{cases}$$

wo z. B. (xy) den von dem positiven Theile der Axe der x mit dem positiven Theile der Axe der y eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnet. Lassen wir nun die Ebene der $x'y'$ mit der Ebene der xy , den positiven Theil der Axe der x' mit dem positiven Theile der Axe der x zusammenfallen; so ist

$$\begin{aligned} (xx') &= 0, & (xy') &= 90^\circ, & (xz') &= 90^\circ, \\ (yx') &= (xy) & (yy') &= \pm \{90^\circ - (xy)\}, & (yz') &= 90^\circ; \\ (zx') &= (xz); \end{aligned}$$

*) M. s. z. B. meine Supplemente zum mathematischen Wörterbuche. Th. I. S. 470.

wobei wir uns, was offenbar verstattet ist, die positiven Theile der Axen der y und y' so angenommen gedacht haben, dass man, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, denselben Weg einschlagen muss, wie um von dem positiven Theile der Axe der x' durch den Winkel $(x'y')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y' zu gelangen. Also gehen unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen 1. in die folgenden über:

$$2. \begin{cases} x' = x + y \cos(xy) + z \cos(xz), \\ x' \cos(xy) + y' \sin(xy) = y + z \cos(yz) + x \cos(xy), \\ x' \cos(xz) + y' \cos(zy') + z' \cos(xz') = z + x \cos(xz) + y \cos(yz). \end{cases}$$

Sind in Bezug auf das schiefwinklige System a, b, c die drei Parameter einer beliebigen Ebene, deren Gleichung in Bezug auf das in Rede stehende System

$$3. A_1 x + B_1 y + C_1 z = 1$$

ist; so hat man, weil diese Ebene durch die drei, durch die Coordinaten

$$a, 0, 0; 0, b, 0; 0, 0, c$$

bestimmten Punkte geht, die folgenden Gleichungen

$$A_1 a = 1, B_1 b = 1, C_1 c = 1;$$

aus denen sich

$$A_1 = \frac{1}{a}, B_1 = \frac{1}{b}, C_1 = \frac{1}{c}$$

ergiebt, so dass also

$$4. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

die Gleichung unserer Ebene in Bezug auf das schiefwinklige System ist.

Die drei Parameter dieser Ebene in Bezug auf das rechtwinklige System, welche wir durch p, q, r bezeichnen wollen, kann man auf folgende Art finden.

Zuvörderst ist klar, dass

$$5. p = a$$

ist.

Die Gleichung der Durchschnittslinie der in Rede stehenden Ebene mit der Ebene der xy ist nach 4.

$$6. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Zur Verwandlung der Coordinaten in der Ebene hat man nach 2., wie leicht erhellen wird, die folgenden Gleichungen:

$$7. \begin{cases} x' = x + y \cos(xy), \\ x' \cos(xy) + y' \sin(xy) = y + x \cos(xy). \end{cases}$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen x und y ; so erhält man

$$8. x = \frac{x' \sin(xy) - y' \cos(xy)}{\sin(xy)}, y = \frac{x' - x}{\cos(xy)} = \frac{y'}{\sin(xy)}.$$

Also ist in Bezug auf das rechtwinklige System die Gleichung der Durchschnittslinie unserer Ebene mit der Ebene der xy oder $x'y'$

$$9. \frac{x' \sin(xy) - y' \cos(xy)}{a \sin(xy)} + \frac{y'}{b \sin(xy)} = 1.$$

Weil nun $y'=q$ für $x'=0$; so ist

$$\left\{ \frac{1}{b \sin(xy)} - \frac{\cos(xy)}{a \sin(xy)} \right\} q = 1,$$

d. i.

$$10. q = \frac{ab \sin(xy)}{a - b \cos(xy)}.$$

Setzt man nun überhaupt

$$x = F(x', y', z'), \quad y = F_1(x', y', z'), \quad z = F_2(x', y', z');$$

so ist

$$\frac{F(x', y', z')}{a} + \frac{F_1(x', y', z')}{b} + \frac{F_2(x', y', z')}{c} = 1$$

die Gleichung unserer Ebene in Bezug auf das rechtwinklige System, und man hat also, weil $z'=r$ für $x'=0, y'=0$, zur Bestimmung von r die folgende Gleichung:

$$11. \frac{F(0, 0, r)}{a} + \frac{F_1(0, 0, r)}{b} + \frac{F_2(0, 0, r)}{c} = 1.$$

Da nun

$$x = F(x', y', z'), \quad y = F_1(x', y', z'), \quad z = F_2(x', y', z')$$

überhaupt aus den Gleichungen

$$x' = x + y \cos(xy) + z \cos(xz),$$

$$x' \cos(xy) + y' \sin(xy) = y + z \cos(yz) + x \cos(xy),$$

$$x' \cos(xz) + y' \cos(yz) + z' \cos(xz) = z + x \cos(xz) + y \cos(yz)$$

bestimmt werden müssen; so hat man, wenn der Kürze wegen

$$F(0, 0, r) = \xi, \quad F_1(0, 0, r) = v, \quad F_2(0, 0, r) = \zeta$$

gesetzt wird, offenbar die folgenden Gleichungen:

$$0 = \xi + v \cos(xy) + \zeta \cos(xz),$$

$$0 = v + \zeta \cos(yz) + \xi \cos(xy),$$

$$r \cos(xz) = \zeta + \xi \cos(xz) + v \cos(yz).$$

Bestimmt man aus den beiden ersten Gleichungen ξ und v ; so erhält man

$$12. \begin{cases} \xi = - \frac{\cos(xz) - \cos(xy) \cos(yz)}{\sin(xy)^2} \zeta, \\ v = - \frac{\cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz)}{\sin(xy)^2} \zeta; \end{cases}$$

und folglich, wenn man diese Ausdrücke in die dritte Gleichung einführt, und der Kürze wegen hier und in der Folge immer

$$13. L = 1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 + 2 \cos(xy) \cos(xz) \cos(yz)$$

setzt,

$$14. r \cos(xz) = \frac{L}{\sin(xy)^2} \zeta.$$

Nun ist aber nach einer bekannten Gleichung der analytischen Geometrie *)

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 - \cos(xz')^2 \\ &\quad + \cos(xy)^2 \cos(xz')^2 + 2\cos(xy) \cos(xz) \cos(yz) \\ &= 1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 + 2\cos(xy) \cos(xz) \cos(yz) \\ &\quad - \sin(xy)^2 \cos(xz')^2, \end{aligned}$$

d. i.

$$0 = L - \sin(xy)^2 \cos(xz')^2,$$

und folglich

$$15. \cos(xz')^2 = \frac{L}{\sin(xy)^2}.$$

Daher ist nach 14.

$$\zeta = \frac{r}{\cos(xz')},$$

und man hat also jetzt nach 12. die drei folgenden Gleichungen:

$$16. \begin{cases} \zeta = F(0,0,r) = - \frac{\cos(xz) - \cos(xy) \cos(yz)}{\sin(xy)^2 \cos(xz')} r, \\ v = F_1(0,0,r) = - \frac{\cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz)}{\sin(xy)^2 \cos(xz')} r, \\ \zeta = F_2(0,0,r) = \frac{r}{\cos(xz')}. \end{cases}$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung II. ein und bestimmt dann r ; so erhält man

$$r = - \frac{\cos(xz')}{\frac{\cos(xz) - \cos(xy) \cos(yz)}{a \sin(xy)^2} + \frac{\cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz)}{b \sin(xy)^2} - \frac{1}{c}},$$

oder, wenn man für $\cos(xz')$ seinen sich aus 15. ergebenden Ausdruck setzt,

$$17. r = - \frac{\sin(xy) \cdot \sqrt{L}}{\frac{\cos(xz) - \cos(xy) \cos(yz)}{a} + \frac{\cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz)}{b} - \frac{\sin(xy)^2}{c}},$$

die Quadratwurzel positiv oder negativ genommen, je nachdem $\cos(xz')$ positiv oder negativ, d. i. je nachdem (xz') kleiner oder grösser als 90° ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$18. \begin{cases} A = \frac{1}{a}, \quad B = \frac{a - b \cos(xy)}{ab \sin(xy)}; \\ C = - \frac{\frac{\cos(xz) - \cos(xy) \cos(yz)}{a} + \frac{\cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz)}{b} - \frac{\sin(xy)^2}{c}}{\sin(xy) \cdot \sqrt{L}}; \end{cases}$$

so ist die Gleichung unserer Ebene in Bezug auf das rechtwinklige System

$$19. Ax' + By' + Cz' = 1.$$

*) A. a. O. S. 472.

Aus 18. ergibt sich, wenn man der Kürze wegen

$$20. \quad Q = \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \\ - \frac{2 \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \}}{ab} \\ - \frac{2 \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \}}{ac} \\ - \frac{2 \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}}{bc}$$

setzt, mittelst einiger leichten goniometrischen Transformationen

$$21. \quad A^2 + B^2 + C^2 = \frac{Q}{L};$$

und auf ganz ähnliche Art erhält man, wenn in Bezug auf das schiefwinklige System a', b', c' die Parameter einer andern Ebene sind, deren Gleichung in Bezug auf das rechtwinklige System

$$22. \quad A'x' + B'y' + C'z' = 1$$

ist, und der Kürze wegen

$$23. \quad Q' = \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \\ - \frac{2 \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \}}{a'b'} \\ - \frac{2 \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \}}{a'c'} \\ - \frac{2 \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}}{b'c'}$$

gesetzt wird,

$$24. \quad A'^2 + B'^2 + C'^2 = \frac{Q'}{L}.$$

Ferner erhält man mittelst der Ausdrücke 18. und der sich aus denselben für A', B', C' unmittelbar ergebenden Ausdrücke, wenn man der Kürze wegen

$$25. \quad P = \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \\ - \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\ - \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\ - \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}$$

setzt, ohne Schwierigkeit

$$26. \quad AA' + BB' + CC' = \frac{P}{L}.$$

Weil nun, wenn V den von den beiden Ebenen, deren Parameter a, b, c und a', b', c' sind, eingeschlossenen Winkel bezeichnet, nach einer sehr bekannten Formel der analytischen Geometrie *)

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$$

ist; so ist nach 21., 24. und 26.

$$27. \quad \cos V = \frac{P}{\sqrt{QQ'}},$$

wo, weil V zwei einander zu 180° ergänzende Werthe hat, die Quadratwurzel positiv und negativ genommen werden kann. Die Ausdrücke von P, Q, Q' sind aus 20, 23. und 25. bekannt, und würden sich leicht in die Gleichung 27. einführen lassen.

Sollen die beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen; so muss $P=0$ seyn, d. h. die Parameter a, b, c und a', b', c' müssen der Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} 28. \quad 0 = & \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \\ & - \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\ & - \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\ & - \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} \end{aligned}$$

genügen.

3.

Es ist nun

$$\begin{aligned} QQ' = & \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \\ & - \frac{2}{ab} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\ & - \frac{2}{ac} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\ & - \frac{2}{bc} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} \end{aligned}$$

*) A. a. O. Thl. II, S. 920.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2}{a'b'} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\
 & - \frac{2}{a'c'} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\
 & - \frac{2}{b'c'} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} \\
 & + \frac{4}{aba'b'} \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \}^2 \\
 & + \frac{4}{aca'c'} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \}^2 \\
 & + \frac{4}{bcb'c'} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}^2 \\
 & + \frac{4}{aa'} \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\
 & + \frac{4}{bb'} \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} \\
 & + \frac{4}{cc'} \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & P^2 = \\
 & \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\}^2 \\
 & + \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right)^2 \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \}^2 \\
 & + \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right)^2 \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \}^2 \\
 & + \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right)^2 \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}^2 \\
 & - 2 \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\} \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\
 & - 2 \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\
 & - 2 \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\
 &+ 2 \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} \\
 &+ 2 \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}
 \end{aligned}$$

Um nun die Differenz

$$QQ' - P^2$$

zu finden, entwickle man die folgenden Grössen.

Zuerst ergibt sich ohne alle Schwierigkeit

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \\
 &\quad - \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\}^2 \\
 &= \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right)^2 \sin(xz)^2 \sin(yz)^2 + \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right)^2 \sin(xy)^2 \sin(yz)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right)^2 \sin(xy)^2 \sin(xz)^2 .
 \end{aligned}$$

Ferner erhält man eben so leicht

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \\
 &\quad - \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\}^2 \\
 &\quad - \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right)^2 \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \}^2 \\
 &\quad - \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right)^2 \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \}^2 \\
 &\quad - \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right)^2 \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}^2 \\
 &= \left\{ \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right)^2 + \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right)^2 + \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right)^2 \right\} L \\
 &\quad - \frac{4}{aba'b'} \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \}^2 \\
 &\quad - \frac{4}{aca'c'} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \}^2 \\
 &\quad - \frac{4}{bcb'o'} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}^2 .
 \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{ab} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \\ & - \frac{2}{a'b'} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \\ & + 2 \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\} \\ & = - 2 \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right) \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right) \sin(xy)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{ac} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \\ & - \frac{2}{a'c'} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \\ & + 2 \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\} \\ & = + 2 \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right) \sin(xz)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{bc} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a'^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b'^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c'^2} \right\} \\ & - \frac{2}{b'c'} \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{a^2} + \frac{\sin(xz)^2}{b^2} + \frac{\sin(xy)^2}{c^2} \right\} \\ & + 2 \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \left\{ \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \right\} \\ & = - 2 \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right) \sin(yz)^2. \end{aligned}$$

Nimmt man nun alles Vorhergehende zusammen; so erhält man mittelst der beiden obigen Ausdrücke von QQ' und P^2 ohne alle Schwierigkeit

$$\begin{aligned} & QQ' - P^2 = \\ & \left\{ \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right)^2 + \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right)^2 + \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right)^2 \right\} L \\ & - 2 \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right) \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right) \sin(xy)^2 \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\ & + 2 \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right) \sin(xz)^2 \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\ & - 2 \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right) \sin(yz)^2 \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{4}{aa'} \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) - 2 \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'c} \right) \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \right\} \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\
 & \quad \times \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\
 & + \left\{ \frac{4}{bb'} \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) - 2 \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \right\} \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\
 & \quad \times \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} \\
 & + \left\{ \frac{4}{cc'} \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) - 2 \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \right\} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\
 & \quad \times \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} .
 \end{aligned}$$

Weil nun aber

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{aa'} \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) - 2 \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) &= -2 \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right) , \\
 \frac{4}{bb'} \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) - 2 \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) &= +2 \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right) , \\
 \frac{4}{cc'} \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) - 2 \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) &= -2 \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right) \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right) ;
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 L \cos(xy) &= \sin(xy)^2 \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\
 &+ \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} , \\
 L \cos(xz) &= \sin(xz)^2 \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\
 &+ \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} , \\
 L \cos(yz) &= \sin(yz)^2 \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} \\
 &+ \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \}
 \end{aligned}$$

ist; so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
 29. \quad R &= \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right)^2 + \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right)^2 + \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right)^2 \\
 &- 2 \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right) \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right) \cos(xy) \\
 &+ 2 \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{bc'} - \frac{1}{b'c} \right) \cos(xz) \\
 &- 2 \left(\frac{1}{ab'} - \frac{1}{a'b} \right) \left(\frac{1}{ac'} - \frac{1}{a'c} \right) \cos(yz)
 \end{aligned}$$

setzen,

Nach 27. ist

$$QQ' - P^2 = LR$$

$$\cos V = \frac{P}{\sqrt{QQ'}} ,$$

und folglich

$$\sin V = \sqrt{\frac{QQ' - P^2}{QQ'}}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$30. \sin V = \sqrt{\frac{LR}{QQ'}},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Aus 27. und 30. erhält man ferner

$$31. \cot V = \frac{P}{\sqrt{LR}},$$

und

$$32. \tan V = \frac{\sqrt{LR}}{P},$$

zwei Formeln, in denen die Quadratwurzel positiv und negativ genommen werden kann.

Mittelst 13., 20., 23., 25. und 29. kann man leicht alle vorhergehende Ausdrücke in völlig entwickelter Form darstellen, welches hier die Beengtheit des Raums nicht erlaubt.

Setzen wir

$$33. \begin{cases} \cos Z = \frac{\cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz)}{\sin(xz) \sin(yz)}, \\ \cos Y = \frac{\cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy)}{\sin(yz) \sin(xy)}, \\ \cos X = \frac{\cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz)}{\sin(xy) \sin(xz)}; \end{cases}$$

wo X, Y, Z nach den bekannten Methoden der sphärischen Trigonometrie auf verschiedene Arten mit Leichtigkeit berechnet werden können; so ist

$$\sin Z = \frac{\sqrt{L}}{\sin(xz) \sin(yz)},$$

$$\sin Y = \frac{\sqrt{L}}{\sin(yz) \sin(xy)},$$

$$\sin X = \frac{\sqrt{L}}{\sin(xy) \sin(xz)};$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$34. \quad T = \frac{\sin(yz)^2}{aa'} + \frac{\sin(xz)^2}{bb'} + \frac{\sin(xy)^2}{cc'} \\ - \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{a'b} \right) \sin(xz) \sin(yz) \cos Z \\ - \left(\frac{1}{ac'} + \frac{1}{a'c} \right) \sin(yz) \sin(xy) \cos Y \\ - \left(\frac{1}{bc'} + \frac{1}{b'c} \right) \sin(xy) \sin(xz) \cos X$$

setzen,

$$35. \quad \begin{cases} \tan V = \sin(xz) \sin(yz) \sin Z \cdot \frac{\sqrt{R}}{T}, \\ \tan V = \sin(yz) \sin(xy) \sin Y \cdot \frac{\sqrt{R}}{T}, \\ \tan V = \sin(xy) \sin(xz) \sin X \cdot \frac{\sqrt{R}}{T}. \end{cases}$$

4.

Bezeichnet W den von der Ebene, deren Parameter a, b, c sind, und deren Gleichung in Bezug auf das rechtwinklige System

$$Ax' + By' + Cz' = 1$$

ist, mit der Ebene der $x'y'$ oder der xy eingeschlossenen Winkel; so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie

$$\cos W = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad ^*),$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$36. \quad U =$$

$$\cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) + \frac{a}{b} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \} - \frac{a}{c} \sin(xy)^2$$

setzen, nach 18. und 21.

$$37. \quad \cos W = - \frac{U}{a \sin(xy) \sqrt{Q}},$$

*) A. a. O. Thl. II. S. 921.

oder,

oder, wenn wir

$$\begin{aligned}
 38. \quad S = & \sin(yx)^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin(xz)^2 + \frac{a^2}{c^2} \sin(xy)^2 \\
 & - 2 \frac{a}{b} \{ \cos(xy) - \cos(xz) \cos(yz) \} \\
 & - 2 \frac{a}{c} \{ \cos(xz) - \cos(yz) \cos(xy) \} \\
 & - 2 \frac{aa}{bc} \{ \cos(yz) - \cos(xy) \cos(xz) \}
 \end{aligned}$$

setzen,

$$39. \quad \cos W = - \frac{U}{\sin(xy) \sqrt{S}}.$$

Setzt man nun bloss

$$\begin{aligned}
 \sin(xy)^2 &= 1 - \cos(xy)^2, \\
 \sin(xz)^2 &= 1 - \cos(xz)^2, \\
 \sin(yz)^2 &= 1 - \cos(yz)^2;
 \end{aligned}$$

so erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$S \sin(xy)^2 - U^2 = \left\{ 1 + \frac{a^2}{b^2} - 2 \frac{a}{b} \cos(xy) \right\} L,$$

und folglich, weil nach 39.

$$\sin W = \frac{\sqrt{S \sin(xy)^2 - U^2}}{\sin(xy) \sqrt{S}}$$

ist,

$$40. \quad \sin W = \frac{\sqrt{\left\{ 1 + \frac{a^2}{b^2} - 2 \frac{a}{b} \cos(xy) \right\} L}}{\sin(xy) \sqrt{S}}.$$

Auch ergibt sich aus 39. und 40.

$$41. \quad \cot W = - \frac{U}{\sqrt{\left\{ 1 + \frac{a^2}{b^2} - 2 \frac{a}{b} \cos(xy) \right\} L}},$$

und

$$42. \quad \tan W = - \frac{\sqrt{\left\{ 1 + \frac{a^2}{b^2} - 2 \frac{a}{b} \cos(xy) \right\} L}}{U}.$$

In den im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Formeln ist ein grosser Theil der ganzen mathematischen Krystallographie enthalten. So würden sich z. B. aus denselben alle in *C. F. Naumanns Grundrisse der Krystallographie. Leipzig 1826.* mit *Gruner's Beiträge I. Thl.*

telst der sphärischen Trigonometrie gefundenen Formeln mit grosser Leichtigkeit herleiten lassen. Zu den auf das hexagonale oder drei- und einaxige Krystallisationssystem, über welches *Naumann* einen lesenswerthen Aufsatz in den *Annalen der Physik und Chemie*. B. LXXXV. S. 245. geliefert hat, sich beziehenden Formeln kann man immer mittelst einer sehr einfachen Coordinatenverwandlung gelangen. Specielle Anwendungen gehören aber jetzt nicht zu meinem Zwecke. Späterhin werde ich vielleicht auf diesen Gegenstand zurückkommen.

IX.

Über die Aufgabe, die Entfernung eines Weltkörpers von der Erde zu bestimmen.

Die allgemeinste Methode, die Entfernung eines Weltkörpers von der Erde zu bestimmen, ist folgende. Auf der Oberfläche der Erde, die wir uns hier, wie immer, wenn es auf grössere Genauigkeit ankommt, als ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenes Sphäroid denken, seyen A und A_1 zwei Punkte, deren Längendifferenz entweder 0 oder 180° ist, und die also unter einem und demselben Meridiane liegen. Die Polhöhen und die sogenannten geocentrischen Breiten dieser Punkte, so wie auch die von dem Mittelpunkt der Erde, welcher durch C bezeichnet werden mag, nach denselben gezogenen Halbmesser CA und CA_1 werden als bekannt vorausgesetzt *). Vereinigen sich nun zwei in A und A_1 befindliche Beobach-

- *) Die geocentrische Breite ϕ eines Orts kann aus dessen Polhöhe ω , welche bekanntlich der 90° nicht übersteigende Neigungswinkel der durch diesen Ort gezogenen Normale des Erdsphäroids gegen die Ebene des Aequators oder wenigstens diesem Winkel gleich ist, auf folgende Art gefunden werden. Der Halbmesser des Aequators sey a , die halbe Erdaxe sey b ; so ist

$$1. \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung des durch den in Rede stehenden Ort gelegten Erdmeridians. Bezeichnen nun x, y die Coordinaten dieses Orts, so ist nach Principien der höhern Geometrie

$$2. x - y = - \frac{dx}{dy} (u - x)$$

die Gleichung der durch den in Rede stehenden Ort gezogenen Normale des Erdsphäroids, und folglich

$$3. \text{tang } \omega = - \frac{dx}{dy},$$

wobei wir annehmen, dass die Coordinaten x, y beide positiv sind, welches offenbar verstatet ist. Nun ist aber offenbar

$$4. \text{tang } \phi = \frac{y}{x}.$$

ter mit einander, und messen, ein jeder nämlich an seinem Beobachtungsorte, die Höhe eines Weltkörpers K im Moment seines Durchgangs durch den gemeinschaftlichen Meridian der beiden Beobachtungsorte an einem und demselben Tage; so hat man alle Data, welche zur Berechnung der Entfernung CK des Weltkörpers K im Moment seines Durchgangs durch den gemeinschaftlichen Meridian der beiden Beobachtungsorte, dem die beiden gemessenen Höhen entsprechen, von dem Mittelpunkte der Erde nöthig sind. Da mir die Auflösung, welche für diese Aufgabe gewöhnlich gegeben wird, rücksichtlich der Allgemeinheit und in allen Fällen völlig sichern Anwendbarkeit der

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$5. \frac{\tan \phi}{\tan \omega} = - \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Differentiirt man aber die Gleichung 1.; so erhält man

$$- \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Also ist nach 5.

$$6. \frac{\tan \phi}{\tan \omega} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \tan \phi = \frac{b^2}{a^2} \tan \omega, \quad \tan \omega = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi.$$

Setzt man die sogenannte Abplattung $\frac{a-b}{a} = n$; so ist $\frac{b}{a} = 1-n$, und folglich nach 6.

$$7. \tan \phi = (1-n)^2 \tan \omega, \quad \tan \omega = \frac{\tan \phi}{(1-n)^2}.$$

Den nach dem in Rede stehenden Orte gezogenen Erdradius r kann man auf folgende Art finden. Weil nach 4.

$$y = x \tan \phi$$

ist; so ist nach 1.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x \tan \phi}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \tan^2 \phi + b^2} \quad \text{oder} \quad x^2 = \frac{a^2 b^2 \cos^2 \phi}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}.$$

Nun ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 (1 + \tan^2 \phi) = x^2 \sec^2 \phi.$$

Also ist

$$8. r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}, \quad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}}.$$

Auch ist

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \phi + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \phi}.$$

Nach 6. ist aber

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\tan \omega}{\tan \phi} = \frac{\cos \phi \sin \omega}{\sin \phi \cos \omega},$$

und folglich

$$\cos \phi^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \phi^2 = \frac{\cos \phi}{\cos \omega} (\cos \phi \cos \omega + \sin \phi \sin \omega) = \frac{\cos \phi}{\cos \omega} \cos(\phi - \omega).$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$9. r = a \sqrt{\frac{\cos \omega}{\cos \phi \cos(\phi - \omega)}}.$$

entwickelten Formeln Manches zu wünschen übrig zu lassen scheint; so werde ich auf den folgenden Blättern eine andere Auflösung derselben zu geben versuchen.

In Fig. 16. sey **ONWS** der elliptische Meridian, welcher durch die beiden Punkte **A** und **A₁** geht; **NS** sey die Erdaxe, **N** und **S** seyen der Nord- und Südpol der Erde; **OW** sey der auf **NS** senkrechte Durchmesser des in Rede stehenden Erdmeridians. **CO** soll als der positive Theil der Axe der x , **CN** als der positive Theil der Axe der y angenommen, und die Quadranten **ON**, **NW**, **WS**, **SO** des Meridians **ONWS** sollen nach der Reihe der erste, zweite, dritte, vierte Quadrant genannt werden. Liegen die Punkte **A** oder **A₁** im ersten oder vierten Quadranten, so sollen θ und θ_1 ihre Polhöhen, ϕ und ϕ_1 ihre geocentrischen Breiten bezeichnen; liegen dagegen die Punkte **A** oder **A₁** im zweiten oder dritten Quadranten, so sollen θ und θ_1 die Ergänzungen ihrer Polhöhen zu 180° , ϕ und ϕ_1 die Ergänzungen ihrer geocentrischen Breiten zu 180° bezeichnen, wobei übrigens die Polhöhen und geocentrischen Breiten immer als positiv oder negativ betrachtet werden, jenachdem die entsprechenden Punkte im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten liegen, welches bekanntlich ganz allgemein gebräuchlich ist.

Die Erdhalbmesser **CA** und **CA₁** sollen durch r und r_1 bezeichnet werden; die Entfernung **CK** des Weltkörpers **K** im Moment seines Durchgangs durch den gemeinschaftlichen Meridian von **A** und **A₁** vom Mittelpunkte der Erde wollen wir durch R , seine Entfernungen von den Punkten **A** und **A₁** aber durch ρ und ρ_1 bezeichnen. Die diesem Moment entsprechenden, in **A** und **A₁** gemessenen Höhen des Weltkörpers **K** sollen, wenn der Durchgang in dem der beiden Quadranten, in welche die über dem Horizont liegende Hälfte des Meridians durch das Zenith getheilt wird, erfolgt, in welchem der sichtbare Weltpol nicht liegt, durch h und h_1 bezeichnet werden; dagegen sollen h und h_1 die Ergänzungen der gemessenen Höhen zu 180° bezeichnen, wenn der Durchgang in dem der beiden in Rede stehenden Quadranten erfolgt, in welchem der sichtbare Weltpol liegt, wobei übrigens Höhen über dem Horizonte immer als positiv, Höhen unter dem Horizonte dagegen immer als negativ betrachtet werden, welches auch sonst bekanntlich allgemein gebräuchlich ist.

Fassen wir nun zunächst bloss den Punkt **A** in's Auge, so soll dieser Punkt selbst als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x' , y' , seine Mittagslinie als Axe der x' , die von **A** nach seinem Zenith gezogene Linie als der positive Theil der Axe der y' angenommen werden; der positive Theil der Axe der x' soll aber, in welchem der vier Quadranten des Erdmeridians **ONWS** der Punkt **A** auch liegen mag, immer so angenommen werden, dass in dem von ihm und dem positiven Theile der Axe der y' eingeschlossenen rechten Winkel die von **A** nach dem sichtbaren Weltpole gezogene Linie nicht liegt. Die Coordinaten des Weltkörpers **K** bei seinem Durchgange durch den gemeinschaftlichen Meridian der beiden Beobachtungsorte in Bezug auf die beiden angenommenen rechtwinkligen Coordinatensysteme, deren Anfangspunkte **C** und **A** sind, seyen respective x , y und x' , y' ; die Coordinaten von **A** in Bezug auf das System der x , y seyen aber α , β .

Alles dies vorausgesetzt, wird man sich nun, namentlich wenn man Fig. 16. aufmerksam betrachtet, leicht von der allgemeinen Richtigkeit der folgenden Gleichungen überzeugen:

$$1. \quad \alpha = r \cos \phi, \quad \beta = r \sin \phi;$$

und

$$2. \quad x' = \rho \cosh, \quad y' = \rho \sinh.$$

Nach den aus der analytischen Geometrie bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung ist aber

$$x = a + x' \cos(xx') + y' \cos(xy') ,$$

$$y = \beta + x' \cos(yx') + y' \cos(yy') .$$

Liegt nun der Punkt A in dem ersten Quadranten des Erdmeridians $ONWS$; so ist, wie leicht erhellet, wenn man sich in Fig. 16. nur von A aus zwei mit den Linien Cx , Cy parallele und nach denselben Seiten hin gerichtete Linien gezogen denkt,

$$(xx') = 90^\circ - \theta , \quad (xy') = \theta ; \quad (yx') = 180^\circ - \theta , \quad (yy') = 90^\circ - \theta ;$$

$$\cos(xx') = \sin \theta , \quad \cos(xy') = \cos \theta ; \quad \cos(yx') = -\cos \theta , \quad \cos(yy') = \sin \theta ;$$

folglich

$$3. \quad \begin{cases} x = a + x' \sin \theta + y' \cos \theta , \\ y = \beta - x' \cos \theta + y' \sin \theta . \end{cases}$$

Liegt A in dem zweiten Quadranten des Erdmeridians $ONWS$; so ist, wie leicht erhellet, wenn man sich nur wieder von A aus zwei mit den Linien Cx , Cy parallele und nach denselben Seiten hin gerichtete Linien gezogen denkt,

$$(xx') = 270^\circ - \theta , \quad (xy') = \theta ; \quad (yx') = \theta , \quad (yy') = \theta - 90^\circ ;$$

$$\cos(xx') = -\sin \theta , \quad \cos(xy') = \cos \theta ; \quad \cos(yx') = \cos \theta , \quad \cos(yy') = \sin \theta ;$$

folglich

$$4. \quad \begin{cases} x = a - x' \sin \theta + y' \cos \theta , \\ y = \beta + x' \cos \theta + y' \sin \theta . \end{cases}$$

Liegt ferner A im dritten Quadranten des Erdmeridians $ONWS$; so ist, wie leicht erhellet, wenn man wieder dieselbe Construction wie vorher macht,

$$(xx') = \theta - 90^\circ , \quad (xy') = 360^\circ - \theta ; \quad (yx') = \theta - 180^\circ , \quad (yy') = \theta - 90^\circ ;$$

$$\cos(xx') = \sin \theta , \quad \cos(xy') = \cos \theta ; \quad \cos(yx') = -\cos \theta , \quad \cos(yy') = \sin \theta ;$$

folglich

$$5. \quad \begin{cases} x = a + x' \sin \theta + y' \cos \theta , \\ y = \beta - x' \cos \theta + y' \sin \theta . \end{cases}$$

Liegt endlich A im vierten Quadranten des Erdmeridians $ONWS$; so ist, wie leicht erhellet, wenn man wieder dieselbe Construction wie vorher macht,

$$(xx') = 90^\circ + \theta , \quad (xy') = -\theta ; \quad (yx') = -\theta , \quad (yy') = 90^\circ - \theta ;$$

$$\cos(xx') = -\sin \theta , \quad \cos(xy') = \cos \theta ; \quad \cos(yx') = \cos \theta , \quad \cos(yy') = \sin \theta ;$$

folglich

$$6. \quad \begin{cases} x = a - x' \sin \theta + y' \cos \theta , \\ y = \beta + x' \cos \theta + y' \sin \theta . \end{cases}$$

Demnach ist überhaupt

$$7. \quad \begin{cases} x = a \pm x' \sin \theta + y' \cos \theta , \\ y = \beta \mp x' \cos \theta + y' \sin \theta ; \end{cases}$$

und in diesen Gleichungen sind die obern Zeichen zu nehmen, wenn der Punkt A im ersten oder dritten, d.i. in einem ungeraden Quadranten des Erdmeridians $ONWS$ liegt; die untern Zeichen müssen dagegen genommen werden, wenn der Punkt A im zweiten oder vierten, d.i. in einem geraden Quadranten des Erdmeridians $ONWS$ liegt. Führt man nun in die in Rede stehenden Gleichungen die Werthe von a , β

und x', y' aus 1. und 2. ein, und hält immer die vorher wegen der Zeichen gegebenen Bestimmungen fest; so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$8. \begin{cases} x = r \cos \phi \pm \rho \cosh \sin \theta \mp \rho \sinh \cos \theta, \\ y = r \sin \phi \mp \rho \cosh \cos \theta \mp \rho \sinh \sin \theta; \end{cases}$$

oder, was dasselbe ist,

$$9. \begin{cases} x = r \cos \phi \mp \rho \sin(h \pm \theta), \\ y = r \sin \phi \mp \rho \cos(h \pm \theta). \end{cases}$$

Stellt man nun ferner ganz ähnliche Betrachtungen in Bezug auf den Punkt A_1 an; so ergeben sich die beiden neuen Gleichungen

$$10. \begin{cases} x = r_1 \cos \phi_1 \mp \rho_1 \sin(h_1 \pm \theta_1), \\ y = r_1 \sin \phi_1 \mp \rho_1 \cos(h_1 \pm \theta_1); \end{cases}$$

in denen wieder die obere oder untere Zeichen zu nehmen sind, je nachdem der Punkt A_1 in einem ungeraden, oder in einem geraden Quadranten des Erdmeridians **ONWS** liegt.

Wir wollen nun die Punkte A und A_1 selbst gerade oder ungerade Punkte nennen, je nachdem sie respective in geraden oder ungeraden Quadranten des Erdmeridians **ONWS** liegen, und, dies vorausgesetzt, die beiden folgenden Fälle unterscheiden.

Wenn zuvörderst

A ungerade und A_1 ungerade
gerade und gerade

ist; so haben wir nach 9. und 10. die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r \cos \phi \mp \rho \sin(h \pm \theta) &= r_1 \cos \phi_1 \mp \rho_1 \sin(h_1 \pm \theta_1), \\ r \sin \phi \mp \rho \cos(h \pm \theta) &= r_1 \sin \phi_1 \mp \rho_1 \cos(h_1 \pm \theta_1); \end{aligned}$$

oder

$$11. \begin{cases} r \cos \phi - r_1 \cos \phi_1 = -\rho \sin(h \pm \theta) \mp \rho_1 \sin(h_1 \pm \theta_1), \\ r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1 = \pm \rho \cos(h \pm \theta) \mp \rho_1 \cos(h_1 \pm \theta_1). \end{cases}$$

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen ρ und ρ_1 mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination; so erhält man ohne Schwierigkeit

$$12. \begin{cases} \rho = - \frac{(r \cos \phi - r_1 \cos \phi_1) \cos(h_1 \pm \theta_1) \pm (r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1) \sin(h_1 \pm \theta_1)}{\sin \{(h - h_1) \pm (\theta - \theta_1)\}}, \\ \rho_1 = - \frac{(r \cos \phi - r_1 \cos \phi_1) \cos(h \pm \theta) \pm (r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1) \sin(h \pm \theta)}{\sin \{(h - h_1) \pm (\theta - \theta_1)\}}. \end{cases}$$

Man bestimme nun, welches offenbar immer möglich ist, den Hülfswinkel ξ so, dass

$$13. \quad \tan \xi = \frac{r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1}{r \cos \phi - r_1 \cos \phi_1},$$

und die Grösse L dann so, dass

$$14. \quad L \sin \xi = r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1$$

ist; dann hat man offenbar die beiden Gleichungen

$$15. \begin{cases} r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1 = L \sin \xi, \\ r \cos \phi - r_1 \cos \phi_1 = L \cos \xi. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen zuerst r_1 , dann r ; so erhält man

$$16. \begin{cases} r \sin(\phi - \phi_1) = L \sin(\xi - \phi_1), \\ r_1 \sin(\phi - \phi_1) = L \sin(\xi - \phi); \end{cases}$$

und folglich

$$\begin{aligned} (r + r_1) \sin(\phi - \phi_1) &= 2L \sin\left\{\xi - \frac{1}{2}(\phi + \phi_1)\right\} \cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_1), \\ (r - r_1) \sin(\phi - \phi_1) &= 2L \cos\left\{\xi - \frac{1}{2}(\phi + \phi_1)\right\} \sin\frac{1}{2}(\phi - \phi_1). \end{aligned}$$

Dividirt man nun die erste Gleichung durch die zweite; so erhält man

$$\frac{r + r_1}{r - r_1} = \tan\left\{\xi - \frac{1}{2}(\phi + \phi_1)\right\} \cot\frac{1}{2}(\phi - \phi_1),$$

oder

$$17. \tan\left\{\xi - \frac{1}{2}(\phi + \phi_1)\right\} = \frac{r + r_1}{r - r_1} \tan\frac{1}{2}(\phi - \phi_1),$$

mittelst welcher Formel sich der Hülfswinkel ξ sehr leicht berechnen lässt. Hat man aber ξ , so ergibt sich die Grösse L sehr leicht mittelst einer der beiden Gleichungen 16. Hat man auf diese Weise ξ und L gefunden, so findet man ρ und ρ_1 mittelst der beiden aus 12. und 15. sich leicht ergebenden, zur logarithmischen Rechnung sehr bequemen Formeln:

$$18. \rho = -L \frac{\cos\left\{\xi \mp (h_1 \pm \theta_1)\right\}}{\sin\left\{(h - h_1) \pm (\theta - \theta_1)\right\}}, \quad \rho_1 = -L \frac{\cos\left\{\xi \mp (h \pm \theta)\right\}}{\sin\left\{(h - h_1) \pm (\theta - \theta_1)\right\}}.$$

Endlich ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$R^2 = x^2 + y^2,$$

und folglich im vorliegenden Falle nach 9. und 10.

$$\begin{aligned} R^2 &= \{r \cos \phi + \rho \sin(h \pm \theta)\}^2 + \{r \sin \phi \mp \rho \cos(h \pm \theta)\}^2, \\ R^2 &= \{r_1 \cos \phi_1 + \rho_1 \sin(h_1 \pm \theta_1)\}^2 + \{r_1 \sin \phi_1 \mp \rho_1 \cos(h_1 \pm \theta_1)\}^2; \end{aligned}$$

oder, wie man leicht findet, wenn man die Quadrate entwickelt,

$$19. \begin{cases} R = \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho \sin(h \pm \theta \mp \phi)}, \\ R = \sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 + 2r_1\rho_1 \sin(h_1 \pm \theta_1 \mp \phi_1)}. \end{cases}$$

Berechnet man die beiden Hülfswinkel η , η_1 mittelst der Formeln

$$20. \tan \eta = \frac{2 \cos\{45^\circ - \frac{1}{2}(h \pm \theta \mp \phi)\} \cdot \sqrt{r\rho}}{r - \rho}, \quad \tan \eta_1 = \frac{2 \cos\{45^\circ - \frac{1}{2}(h_1 \pm \theta_1 \mp \phi_1)\} \cdot \sqrt{r_1\rho_1}}{r_1 - \rho_1};$$

so wird

$$21. R = \frac{r - \rho}{\cos \eta}, \quad R = \frac{r_1 - \rho_1}{\cos \eta_1},$$

wenn man bloss auf die absoluten Werthe der Brüche auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen Rücksicht nimmt.

Wenn ferner

A ungerade
gerade und A_1 gerade
ungerade

ist, so haben wir nach 9. und 10. die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r \cos \phi + \rho \sin(h \pm \theta) &= r_1 \cos \phi_1 + \rho_1 \sin(h_1 \mp \theta_1), \\ r \sin \phi \mp \rho \cos(h \pm \theta) &= r_1 \sin \phi_1 \pm \rho_1 \cos(h_1 \mp \theta_1); \end{aligned}$$

oder

$$22. \quad \begin{cases} r \cos \phi - r_1 \cos \phi_1 = -\rho \sin(h \pm \theta) + \rho_1 \sin(h_1 \mp \theta_1), \\ r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1 = \pm \rho \cos(h \pm \theta) \pm \rho_1 \cos(h_1 \mp \theta_1). \end{cases}$$

Bestimmt man nun aus diesen beiden Gleichungen ρ und ρ_1 ; so erhält man

$$23. \quad \begin{cases} \rho = - \frac{(r \cos \phi - r_1 \cos \phi_1) \cos(h_1 \mp \theta_1) \mp (r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1) \sin(h_1 \mp \theta_1)}{\sin\{(h+h_1) \pm (\theta-\theta_1)\}}, \\ \rho_1 = \frac{(r \cos \phi - r_1 \cos \phi_1) \cos(h \pm \theta) \pm (r \sin \phi - r_1 \sin \phi_1) \sin(h \pm \theta)}{\sin\{(h+h_1) \pm (\theta-\theta_1)\}}. \end{cases}$$

Berechnet man nun ξ und L ganz wie oben; so wird

$$24. \quad \rho = -L \frac{\cos\{\xi \pm (h_1 \mp \theta_1)\}}{\sin\{(h+h_1) \pm (\theta-\theta_1)\}}, \quad \rho_1 = \frac{L \cos\{\xi \mp (h \pm \theta)\}}{\sin\{(h+h_1) \pm (\theta-\theta_1)\}}.$$

Weil ferner wieder

$$R^2 = x^2 + y^2$$

ist; so ist im jetzigen Falle nach 9. und 10.

$$\begin{aligned} R^2 &= \{r \cos \phi + \rho \sin(h \pm \theta)\}^2 + \{r \sin \phi \mp \rho \cos(h \pm \theta)\}^2, \\ R^2 &= \{r_1 \cos \phi_1 + \rho_1 \sin(h_1 \mp \theta_1)\}^2 + \{r_1 \sin \phi_1 \pm \rho_1 \cos(h_1 \mp \theta_1)\}^2; \end{aligned}$$

oder, wenn man die Quadrate entwickelt,

$$25. \quad \begin{cases} R = \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho \sin(h \pm \theta \mp \phi)}, \\ R = \sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 + 2r_1\rho_1 \sin(h_1 \mp \theta_1 \pm \phi_1)}. \end{cases}$$

Berechnet man die beiden Hülfswinkel ζ , ζ_1 mittelst der Formeln

$$26. \quad \tan \zeta = \frac{2 \cos\{45^\circ - \frac{1}{2}(h \pm \theta \mp \phi)\} \cdot \sqrt{r\rho}}{r - \rho}, \quad \tan \zeta_1 = \frac{2 \cos\{45^\circ - \frac{1}{2}(h_1 \mp \theta_1 \pm \phi_1)\} \cdot \sqrt{r_1\rho_1}}{r_1 - \rho_1};$$

so wird

$$27. \quad R = \frac{r - \rho}{\cos \zeta}, \quad R = \frac{r_1 - \rho_1}{\cos \zeta_1},$$

wo man wieder bloss die absoluten Werte der Brüche auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen zu berücksichtigen hat.

X.

Über die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte und über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne.

A.

Über die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte.

1.

Die Aufgabe, durch fünf gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu beschreiben, wird analytisch gewöhnlich auf folgende Weise zur Lösung gebracht. Die Coordinaten der fünf gegebenen Punkte seyen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ und } \beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4.$$

Weil nun die Gleichung eines jeden Kegelschnitts in Bezug auf jedes beliebige Coordinatensystem die Form

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = 0$$

hat, und der gesuchte Kegelschnitt durch die fünf gegebenen Punkte gehen soll; so hat man zur Bestimmung der fünf Coefficienten A, B, C, D, E die fünf folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$\beta^2 A + a\beta B + a^2 C + \beta D + aE + 1 = 0,$$

$$\beta_1^2 A + a_1\beta_1 B + a_1^2 C + \beta_1 D + a_1 E + 1 = 0,$$

$$\beta_2^2 A + a_2\beta_2 B + a_2^2 C + \beta_2 D + a_2 E + 1 = 0,$$

$$\beta_3^2 A + a_3\beta_3 B + a_3^2 C + \beta_3 D + a_3 E + 1 = 0,$$

$$\beta_4^2 A + a_4\beta_4 B + a_4^2 C + \beta_4 D + a_4 E + 1 = 0;$$

mittelst welcher man also die fünf Coefficienten A, B, C, D, E auf dem Wege der gewöhnlichen algebraischen Elimination für Gleichungen des ersten Grades jederzeit finden, und folglich den gesuchten Kegelschnitt bestimmen kann. Dass aber diese Auflösung gar keinen praktischen Werth hat, liegt deutlich vor Augen, indem die wirkliche Bestimmung des gesuchten Kegelschnitts auf diesem Wege gewiss sehr schwierig seyn und in sehr weitläufige und ermüdende Rechnungen führen würde. Ich habe daher schon vor längerer Zeit eine andere Auflösung der in Rede stehenden interessanten und in vieler Beziehung wichtigen Aufgabe zu finden gesucht, die ich im Folgenden mittheilen werde.

2.

Voraussehen lässt sich, dass die Aufgabe einer Auflösung nicht fähig seyn wird, wenn drei der fünf gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen, weil bekanntlich

ein Kegelschnitt und eine gerade Linie höchstens zwei Punkte mit einander gemein haben können. Wenigstens würde, wenn drei der fünf gegebenen Punkte in einer geraden Linie lägen, der gesuchte Kegelschnitt nur durch zwei durch die fünf gegebenen Punkte gehende gerade Linien ersetzt werden können. Deshalb wollen wir im Folgenden immer annehmen, dass nicht drei der fünf gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen, und wollen unter dieser Voraussetzung die fünf gegebenen, natürlich sämtlich in einer Ebene liegenden Punkte durch

$$A, A_1, A_2, A_3, A_4$$

bezeichnen. Die Entfernungen dieser Punkte von dem Anfangspunkte eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems seyen respective

$$r, r_1, r_2, r_3, r_4 ;$$

und die von diesen Entfernungen oder Vektoren mit dem positiven Theile der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel seyen respective

$$\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 ;$$

wobei man zu bemerken hat, dass diese Winkel von dem positiven Theile der Abscissenaxe an durch den von den positiven Theilen der Abscissen- und Ordinatenaxe eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach derselben Richtung hin von 0 bis 360° gezählt werden. Die Grössen

$$r, r_1, r_2, r_3, r_4 ;$$

$$\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

sehen wir im Folgenden als die unmittelbar gegebenen Grössen an, durch welche die Lage der fünf gegebenen Punkte bestimmt wird.

Die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte

$$A, A_1, A_2, A_3, A_4$$

in Bezug auf das angenommene System sind

$$r \cos \omega, \quad r \sin \omega ;$$

$$r_1 \cos \omega_1, \quad r_1 \sin \omega_1 ;$$

$$r_2 \cos \omega_2, \quad r_2 \sin \omega_2 ;$$

$$r_3 \cos \omega_3, \quad r_3 \sin \omega_3 ;$$

$$r_4 \cos \omega_4, \quad r_4 \sin \omega_4 .$$

Durch den Punkt A als Anfang denke man sich zwei mit den primitiven Axen parallele Axen gelegt, und bezeichne die Entfernungen der Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4$$

von dem Punkte A durch

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 ;$$

die von diesen Entfernungen oder Vektoren mit dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe an durch den von den positiven Theilen der neuen Abscissen- und Ordinatenaxe eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach derselben Richtung hin von 0 bis 360° zählt, aber durch

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 .$$

Die Coordinaten der Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4$$

in Bezug auf das secundäre System sind nach den aus der analytischen Geometrie bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung respective

$$r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega, \quad r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega;$$

$$r_2 \cos \omega_2 - r \cos \omega, \quad r_2 \sin \omega_2 - r \sin \omega;$$

$$r_3 \cos \omega_3 - r \cos \omega, \quad r_3 \sin \omega_3 - r \sin \omega;$$

$$r_4 \cos \omega_4 - r \cos \omega, \quad r_4 \sin \omega_4 - r \sin \omega.$$

Also ist

$$\rho_1 = \sqrt{(r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega)^2 + (r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega)^2},$$

$$\rho_2 = \sqrt{(r_2 \cos \omega_2 - r \cos \omega)^2 + (r_2 \sin \omega_2 - r \sin \omega)^2},$$

$$\rho_3 = \sqrt{(r_3 \cos \omega_3 - r \cos \omega)^2 + (r_3 \sin \omega_3 - r \sin \omega)^2},$$

$$\rho_4 = \sqrt{(r_4 \cos \omega_4 - r \cos \omega)^2 + (r_4 \sin \omega_4 - r \sin \omega)^2};$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$1. \quad \begin{cases} \rho_1 = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\omega_1 - \omega)}, \\ \rho_2 = \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos(\omega_2 - \omega)}, \\ \rho_3 = \sqrt{r^2 + r_3^2 - 2rr_3 \cos(\omega_3 - \omega)}, \\ \rho_4 = \sqrt{r^2 + r_4^2 - 2rr_4 \cos(\omega_4 - \omega)}; \end{cases}$$

wo natürlich alle Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

Ferner ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$(r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega) \tan \phi_1 = r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega,$$

$$(r_2 \cos \omega_2 - r \cos \omega) \tan \phi_2 = r_2 \sin \omega_2 - r \sin \omega,$$

$$(r_3 \cos \omega_3 - r \cos \omega) \tan \phi_3 = r_3 \sin \omega_3 - r \sin \omega,$$

$$(r_4 \cos \omega_4 - r \cos \omega) \tan \phi_4 = r_4 \sin \omega_4 - r \sin \omega;$$

oder

$$2. \quad \begin{cases} \tan \phi_1 = \frac{r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega}{r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega}, \\ \tan \phi_2 = \frac{r_2 \sin \omega_2 - r \sin \omega}{r_2 \cos \omega_2 - r \cos \omega}, \\ \tan \phi_3 = \frac{r_3 \sin \omega_3 - r \sin \omega}{r_3 \cos \omega_3 - r \cos \omega}, \\ \tan \phi_4 = \frac{r_4 \sin \omega_4 - r \sin \omega}{r_4 \cos \omega_4 - r \cos \omega}. \end{cases}$$

Die Formeln 1. und 2. dienen zur Berechnung der Grössen

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; \quad \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4.$$

Man kann sich aber die Rechnung auf folgende Art erleichtern. Berechnet man die Hülfswinkel

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$$

mittels der Formeln

$$3. \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \eta_1 &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) \sqrt{r r_1}}{r - r_1}, \\ \operatorname{tang} \eta_2 &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega) \sqrt{r r_2}}{r - r_2}, \\ \operatorname{tang} \eta_3 &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega) \sqrt{r r_3}}{r - r_3}, \\ \operatorname{tang} \eta_4 &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\omega_4 - \omega) \sqrt{r r_4}}{r - r_4}; \end{aligned} \right.$$

so ist, wenn man die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{r - r_1}{\cos \eta_1}, \quad \frac{r - r_2}{\cos \eta_2}, \quad \frac{r - r_3}{\cos \eta_3}, \quad \frac{r - r_4}{\cos \eta_4}$$

durch Einschliessung dieser Brüche in Klammern bezeichnet, nach 1., wie man leicht findet,

$$4. \quad \rho_1 = \left\{ \frac{r - r_1}{\cos \eta_1} \right\}, \quad \rho_2 = \left\{ \frac{r - r_2}{\cos \eta_2} \right\}, \quad \rho_3 = \left\{ \frac{r - r_3}{\cos \eta_3} \right\}, \quad \rho_4 = \left\{ \frac{r - r_4}{\cos \eta_4} \right\}.$$

Setzen wir ferner

$$\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega + \xi_1 - \phi_1) = 90^\circ;$$

so ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_1 - \phi_1) = \cot \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

und folglich

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_1 + \phi_1) &= \operatorname{tang} \left\{ \phi_1 + \frac{1}{2}(\xi_1 - \phi_1) \right\} \\ &= \frac{\operatorname{tang} \phi_1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_1 - \phi_1)}{1 - \operatorname{tang} \phi_1 \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_1 - \phi_1)} = \frac{\operatorname{tang} \phi_1 + \cot \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)}{1 - \operatorname{tang} \phi_1 \cot \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)}, \end{aligned}$$

oder nach 2.

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_1 + \phi_1) \\ &= \frac{(r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) + (r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega) \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)}{(r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) - (r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega) \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)} \\ &= \frac{r_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - r \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)}{r_1 \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega_1) + r \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega_1)} = \frac{r - r_1}{r + r_1} \cot \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega). \end{aligned}$$

Setzen wir also

$$5. \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi_1 - \phi_1) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega), \\ \frac{1}{2}(\xi_2 - \phi_2) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega), \\ \frac{1}{2}(\xi_3 - \phi_3) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega), \\ \frac{1}{2}(\xi_4 - \phi_4) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_4 + \omega); \end{cases}$$

so ist

$$6. \quad \begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_1 + \phi_1) = \frac{r - r_1}{r + r_1} \cot \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega), \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_2 + \phi_2) = \frac{r - r_2}{r + r_2} \cot \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega), \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_3 + \phi_3) = \frac{r - r_3}{r + r_3} \cot \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega), \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\xi_4 + \phi_4) = \frac{r - r_4}{r + r_4} \cot \frac{1}{2}(\omega_4 - \omega). \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun durch

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$$

die den Tangenten

$$\frac{r - r_1}{r + r_1} \cot \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega),$$

$$\frac{r - r_2}{r + r_2} \cot \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega),$$

$$\frac{r - r_3}{r + r_3} \cot \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega),$$

$$\frac{r - r_4}{r + r_4} \cot \frac{1}{2}(\omega_4 - \omega)$$

entsprechenden Bogen oder Winkel, welche den kleinsten absoluten Werth haben, und durch

$$k_1, k_2, k_3, k_4$$

gewisse positive oder negative ganze Zahlen; so ist

$$\frac{1}{2}(\xi_1 + \phi_1) = \mu_1 + k_1 \pi,$$

$$\frac{1}{2}(\xi_2 + \phi_2) = \mu_2 + k_2 \pi,$$

$$\frac{1}{2}(\xi_3 + \phi_3) = \mu_3 + k_3 \pi,$$

$$\frac{1}{2}(\xi_4 + \phi_4) = \mu_4 + k_4 \pi;$$

und folglich

$$7. \begin{cases} \phi_1 = \mu_1 + k_1 \pi - \{90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)\} , \\ \phi_2 = \mu_2 + k_2 \pi - \{90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega)\} , \\ \phi_3 = \mu_3 + k_3 \pi - \{90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega)\} , \\ \phi_4 = \mu_4 + k_4 \pi - \{90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_4 + \omega)\} ; \end{cases}$$

wo es nun aber noch auf eine allgemeine, völlig sichere und möglichst leicht anwendbare Regel, die ganzen Zahlen

$$k_1, k_2, k_3, k_4$$

zu bestimmen, ankommt. Wie man sich bei dieser Bestimmung zu verhalten hat, wollen wir bloss an dem Winkel ϕ_1 oder der ganzen Zahl k_1 zeigen.

Zuvörderst wissen wir aus dem Obigen, dass ϕ_1 immer positiv ist und 360° nie übersteigt. Ferner erhellet aus dem Obigen leicht Folgendes:

1. Wenn

$$r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega \text{ positiv, } r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega \text{ positiv}$$

ist; so ist

$$0 < \phi_1 < 90^\circ .$$

2. Wenn

$$r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega \text{ negativ, } r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega \text{ positiv}$$

ist; so ist

$$90^\circ < \phi_1 < 180^\circ .$$

3. Wenn

$$r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega \text{ negativ, } r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega \text{ negativ}$$

ist; so ist

$$180^\circ < \phi_1 < 270^\circ .$$

4. Wenn

$$r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega \text{ positiv, } r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega \text{ negativ}$$

ist; so ist

$$270^\circ < \phi_1 < 360^\circ .$$

Wenn also

$$1. \quad r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega \text{ positiv, } r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega \text{ positiv}$$

ist; so muss man die ganze Zahl k_1 so bestimmen, dass

$$0 < \mu_1 + k_1 \pi - \{90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)\} < 90^\circ$$

ist.

Wenn

$$2. \quad r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega \text{ negativ, } r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega \text{ positiv}$$

ist; so muss man die ganze Zahl k_1 so bestimmen, dass

$$90^\circ < \mu_1 + k_1 \pi - \{90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)\} < 180^\circ$$

ist.

Wenn

3. $r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega$ negativ, $r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega$ negativ ist; so muss man die ganze Zahl k_1 so bestimmen, dass

$$180^\circ < \mu_1 + k_1 \pi - \{90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)\} < 270^\circ$$

ist.

Wenn endlich

4. $r_1 \cos \omega_1 - r \cos \omega$ positiv, $r_1 \sin \omega_1 - r \sin \omega$ negativ ist; so muss man die ganze Zahl k_1 so bestimmen, dass

$$270^\circ < \mu_1 + k_1 \pi - \{90^\circ - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)\} < 360^\circ$$

ist.

Auf diese Weise kann man die Grössen

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \quad \text{und} \quad \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$$

immer mit völliger Sicherheit bestimmen.

Auch bemerken wir des Folgenden wegen noch, dass keiner der Sinus $\sin(\phi_1 - \phi_2)$, $\sin(\phi_1 - \phi_3)$, $\sin(\phi_1 - \phi_4)$, $\sin(\phi_2 - \phi_3)$, $\sin(\phi_2 - \phi_4)$, $\sin(\phi_3 - \phi_4)$ verschwindet, weil, wenn einer dieser Sinus verschwände, offenbar zwei der fünf gegebenen Punkte mit dem Punkte A in einer geraden Linie liegen würden, welches gegen die Voraussetzung ist, da wir angenommen haben, dass nicht drei der fünf gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen sollen.

3.

Die Coordinaten der Punkte

$$A, A_1, A_2, A_3, A_4$$

in Bezug auf das secundäre System, dessen Anfang A ist, seyen

$$x_1, x_2, x_3, x_4 ;$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 ;$$

so ist

$$x_1 = \rho_1 \cos \phi_1, \quad y_1 = \rho_1 \sin \phi_1 ;$$

$$x_2 = \rho_2 \cos \phi_2, \quad y_2 = \rho_2 \sin \phi_2 ;$$

$$x_3 = \rho_3 \cos \phi_3, \quad y_3 = \rho_3 \sin \phi_3 ;$$

$$x_4 = \rho_4 \cos \phi_4, \quad y_4 = \rho_4 \sin \phi_4 .$$

Zuerst wollen wir nun annehmen, dass durch die fünf gegebenen Punkte eine Ellipse oder Hyperbel beschrieben werden solle, und wollen die Coordinaten der fünf gegebenen Punkte

$$A, A_1, A_2, A_3, A_4$$

in Bezug auf das System der beiden Axen dieser Ellipse oder Hyperbel respective durch

$$X, X_1, X_2, X_3, X_4 ;$$

$$Y, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$$

bezeichnen. Denken wir uns durch den Mittelpunkt der in Rede stehenden Ellipse oder Hyperbel zwei mit den primitiven parallele Coordinatenaxen gelegt; so soll der von dem positiven Theile der Axe der X mit dem positiven Theile der Abscissenaxe des durch den Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel gelegten, dem primitiven parallelen Systems eingeschlossene Winkel, indem dieser Winkel von dem positiven Theile der in Rede stehenden Abscissenaxe an durch den von demselben und dem positiven Theile der entsprechenden Ordinatenaxe eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach derselben Richtung hin von 0 bis 360° gezählt wird, durch θ bezeichnet werden. Dann ist nach den aus der analytischen Geometrie bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung in der Ebene

$$X_1 = X + x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta,$$

$$X_2 = X + x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta,$$

$$X_3 = X + x_3 \cos \theta + y_3 \sin \theta,$$

$$X_4 = X + x_4 \cos \theta + y_4 \sin \theta;$$

und

$$Y_1 = Y - x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta,$$

$$Y_2 = Y - x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta,$$

$$Y_3 = Y - x_3 \sin \theta + y_3 \cos \theta,$$

$$Y_4 = Y - x_4 \sin \theta + y_4 \cos \theta;$$

wobei man nur zu bemerken hat, dass der positive Theil der Axe der Y immer derjenige der beiden Theile dieser Axe ist, zu welchem man zuerst gelangt, wenn man sich von dem positiven Theile der Axe der X an nach derselben Richtung hin bewegt, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 durch den rechten Winkel (x_1, y_1) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen. Führt man die oben gefundenen Ausdrücke von $x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4$ in die vorstehenden Gleichungen ein; so erhält man mittelst einer sehr bekannten goniometrischen Formel ohne die geringste Schwierigkeit

$$X_1 = X + \rho_1 \cos(\theta - \phi_1),$$

$$X_2 = X + \rho_2 \cos(\theta - \phi_2),$$

$$X_3 = X + \rho_3 \cos(\theta - \phi_3),$$

$$X_4 = X + \rho_4 \cos(\theta - \phi_4);$$

und

$$Y_1 = Y - \rho_1 \sin(\theta - \phi_1),$$

$$Y_2 = Y - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2),$$

$$Y_3 = Y - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3),$$

$$Y_4 = Y - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4).$$

Nach der Natur der Ellipse und Hyperbel hat man nun, wenn man jetzt und im Folgenden die obern Zeichen sich immer auf die Ellipse, die untern sich auf die Hyperbel beziehen lässt, die folgenden aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebenden Gleichungen:

$$X + \rho_1$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{X + \rho_1 \cos(\theta - \phi_1)}{a} \right\}^2 \pm \left\{ \frac{Y - \rho_1 \sin(\theta - \phi_1)}{b} \right\}^2 &= 1, \\ \left\{ \frac{X + \rho_2 \cos(\theta - \phi_2)}{a} \right\}^2 \pm \left\{ \frac{Y - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2)}{b} \right\}^2 &= 1, \\ \left\{ \frac{X + \rho_3 \cos(\theta - \phi_3)}{a} \right\}^2 \pm \left\{ \frac{Y - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3)}{b} \right\}^2 &= 1, \\ \left\{ \frac{X + \rho_4 \cos(\theta - \phi_4)}{a} \right\}^2 \pm \left\{ \frac{Y - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)}{b} \right\}^2 &= 1; \end{aligned}$$

zu denen noch die Gleichung

$$\left(\frac{X}{a} \right)^2 \pm \left(\frac{Y}{b} \right)^2 = 1$$

kommt. a und b haben die aus der Theorie der Ellipse und Hyperbel hinreichend bekannte Bedeutung.

Durch Entwicklung der Quadrate in den vier ersten Gleichungen erhält man in Verbindung mit der fünften Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho_1 X \cos(\theta - \phi_1) + \rho_1^2 \cos^2(\theta - \phi_1)}{a^2} \mp \frac{2\rho_1 Y \sin(\theta - \phi_1) - \rho_1^2 \sin^2(\theta - \phi_1)}{b^2} &= 0, \\ \frac{2\rho_2 X \cos(\theta - \phi_2) + \rho_2^2 \cos^2(\theta - \phi_2)}{a^2} \mp \frac{2\rho_2 Y \sin(\theta - \phi_2) - \rho_2^2 \sin^2(\theta - \phi_2)}{b^2} &= 0, \\ \frac{2\rho_3 X \cos(\theta - \phi_3) + \rho_3^2 \cos^2(\theta - \phi_3)}{a^2} \mp \frac{2\rho_3 Y \sin(\theta - \phi_3) - \rho_3^2 \sin^2(\theta - \phi_3)}{b^2} &= 0, \\ \frac{2\rho_4 X \cos(\theta - \phi_4) + \rho_4^2 \cos^2(\theta - \phi_4)}{a^2} \mp \frac{2\rho_4 Y \sin(\theta - \phi_4) - \rho_4^2 \sin^2(\theta - \phi_4)}{b^2} &= 0; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\{2X + \rho_1 \cos(\theta - \phi_1)\} \cos(\theta - \phi_1)}{a^2} &= \pm \frac{\{2Y - \rho_1 \sin(\theta - \phi_1)\} \sin(\theta - \phi_1)}{b^2}, \\ \frac{\{2X + \rho_2 \cos(\theta - \phi_2)\} \cos(\theta - \phi_2)}{a^2} &= \pm \frac{\{2Y - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2)\} \sin(\theta - \phi_2)}{b^2}, \\ \frac{\{2X + \rho_3 \cos(\theta - \phi_3)\} \cos(\theta - \phi_3)}{a^2} &= \pm \frac{\{2Y - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3)\} \sin(\theta - \phi_3)}{b^2}, \\ \frac{\{2X + \rho_4 \cos(\theta - \phi_4)\} \cos(\theta - \phi_4)}{a^2} &= \pm \frac{\{2Y - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)\} \sin(\theta - \phi_4)}{b^2}; \end{aligned}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$8. \quad \pm \frac{a^2}{b^2} = s$$

setzen,

Grunert's Beiträge I. Thl.

$$\begin{aligned}\frac{2X + \rho_1 \cos(\theta - \phi_1)}{2Y - \rho_1 \sin(\theta - \phi_1)} &= \varepsilon \operatorname{tang}(\theta - \phi_1), \\ \frac{2X + \rho_2 \cos(\theta - \phi_2)}{2Y - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2)} &= \varepsilon \operatorname{tang}(\theta - \phi_2), \\ \frac{2X + \rho_3 \cos(\theta - \phi_3)}{2Y - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3)} &= \varepsilon \operatorname{tang}(\theta - \phi_3), \\ \frac{2X + \rho_4 \cos(\theta - \phi_4)}{2Y - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)} &= \varepsilon \operatorname{tang}(\theta - \phi_4); \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}2X - 2\varepsilon Y \operatorname{tang}(\theta - \phi_1) &= -\rho_1 \{ \cos(\theta - \phi_1) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1) \operatorname{tang}(\theta - \phi_1) \}, \\ 2X - 2\varepsilon Y \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) &= -\rho_2 \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) \}, \\ 2X - 2\varepsilon Y \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) &= -\rho_3 \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) \}, \\ 2X - 2\varepsilon Y \operatorname{tang}(\theta - \phi_4) &= -\rho_4 \{ \cos(\theta - \phi_4) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_4) \operatorname{tang}(\theta - \phi_4) \}. \end{aligned}$$

Zieht man nun jede der drei letzten Gleichungen von der nächst vorhergehenden ab; so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{2\varepsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2)}{\cos(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)} &= -\rho_1 \{ \cos(\theta - \phi_1) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1) \operatorname{tang}(\theta - \phi_1) \} \\ &\quad + \rho_2 \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) \}, \\ \frac{2\varepsilon Y \sin(\phi_2 - \phi_3)}{\cos(\theta - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3)} &= -\rho_2 \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) \} \\ &\quad + \rho_3 \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) \}, \\ \frac{2\varepsilon Y \sin(\phi_3 - \phi_4)}{\cos(\theta - \phi_3) \cos(\theta - \phi_4)} &= -\rho_3 \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) \} \\ &\quad + \rho_4 \{ \cos(\theta - \phi_4) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_4) \operatorname{tang}(\theta - \phi_4) \}; \end{aligned}$$

und folglich, wenn man mit jeder der beiden letzten Gleichungen in die nächst vorhergehende dividirt,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{\sin(\phi_2 - \phi_3)} \cdot \frac{\cos(\theta - \phi_3)}{\cos(\theta - \phi_1)} &= \frac{-\rho_1 \{ \cos(\theta - \phi_1) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1) \operatorname{tang}(\theta - \phi_1) \} + \rho_2 \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) \}}{-\rho_2 \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) \} + \rho_3 \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) \}}, \\ \frac{\sin(\phi_2 - \phi_3)}{\sin(\phi_3 - \phi_4)} \cdot \frac{\cos(\theta - \phi_4)}{\cos(\theta - \phi_2)} &= \frac{-\rho_2 \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) \} + \rho_3 \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) \}}{-\rho_3 \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) \} + \rho_4 \{ \cos(\theta - \phi_4) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_4) \operatorname{tang}(\theta - \phi_4) \}}. \end{aligned}$$

Überlegt man nun bloss, dass, wie man mittelst einiger bekannten goniometrischen Formeln leicht findet,

$$\sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3) + \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_1) = \sin(\phi_1 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_2),$$

$$\sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_4) + \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos(\theta - \phi_2) = \sin(\phi_2 - \phi_4) \cos(\theta - \phi_3)$$

ist; so erhält man aus den beiden obigen Gleichungen leicht die beiden folgenden:

$$0 = \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_1) \{ \cos(\theta - \phi_1) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1) \tan(\theta - \phi_1) \}$$

$$+ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2) \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \tan(\theta - \phi_2) \}$$

$$+ \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3) \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \tan(\theta - \phi_3) \},$$

$$0 = \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos(\theta - \phi_2) \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \tan(\theta - \phi_2) \}$$

$$+ \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3) \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \tan(\theta - \phi_3) \}$$

$$+ \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_4) \{ \cos(\theta - \phi_4) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_4) \tan(\theta - \phi_4) \};$$

oder

$$0 = \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \{ \cos^2(\theta - \phi_1) + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi_1) \}$$

$$+ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \{ \cos^2(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi_2) \}$$

$$+ \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \{ \cos^2(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi_3) \},$$

$$0 = \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \{ \cos^2(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi_2) \}$$

$$+ \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \{ \cos^2(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi_3) \}$$

$$+ \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \{ \cos^2(\theta - \phi_4) + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi_4) \};$$

oder

$$0 = \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \{ 1 - (1 - \varepsilon) \sin^2(\theta - \phi_1) \}$$

$$+ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \{ 1 - (1 - \varepsilon) \sin^2(\theta - \phi_2) \}$$

$$+ \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \{ 1 - (1 - \varepsilon) \sin^2(\theta - \phi_3) \},$$

$$0 = \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \{ 1 - (1 - \varepsilon) \sin^2(\theta - \phi_2) \}$$

$$+ \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \{ 1 - (1 - \varepsilon) \sin^2(\theta - \phi_3) \}$$

$$+ \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \{ 1 - (1 - \varepsilon) \sin^2(\theta - \phi_4) \};$$

oder

$$\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

$$= (1 - \varepsilon) \{ \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin^2(\theta - \phi_1) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin^2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin^2(\theta - \phi_3) \},$$

$$\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3)$$

$$= (1 - \varepsilon) \{ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin^2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin^2(\theta - \phi_3) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin^2(\theta - \phi_4) \};$$

oder auch

$$9. (1+\varepsilon) \{ \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \} \\ = -(1-\varepsilon) \{ \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_1) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3) \} ,$$

$$9^*. (1+\varepsilon) \{ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \} \\ = -(1-\varepsilon) \{ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_4) \} .$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen ε durch Division; so erhält man endlich die, bloss noch die *eine* unbekannte Grösse θ enthaltende Gleichung

$$\frac{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2)}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3)} \\ = \frac{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_1) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3)}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_4)} ,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$P = \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) ,$$

$$P_1 = \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) ;$$

$$Q = \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2\phi_1 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2\phi_3 ,$$

$$Q_1 = \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2\phi_3 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2\phi_4 ;$$

$$R = \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin 2\phi_1 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin 2\phi_3 ,$$

$$R_1 = \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin 2\phi_3 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin 2\phi_4$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{P}{P_1} = \frac{Q + R \tan 2\theta}{Q_1 + R_1 \tan 2\theta} ,$$

aus der sich endlich

$$10. \tan 2\theta = - \frac{PQ_1 - P_1Q}{PR_1 - P_1R}$$

ergibt.

Bemerkt man nun, dass, wie man mittelst einiger bekannten goniometrischen Formeln leicht findet,

$$\sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\phi_4 - \phi_2) - \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\phi_3 - \phi_4) = \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_4)$$

ist; so ergibt sich ohne alle Schwierigkeit

$$PQ_1 - P_1Q \\ = - \rho_1 \rho_2 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_3 - \phi_4) (\cos 2\phi_1 - \cos 2\phi_2) \\ - \rho_1 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_4 - \phi_2) (\cos 2\phi_1 - \cos 2\phi_3) \\ - \rho_1 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_2 - \phi_3) (\cos 2\phi_1 - \cos 2\phi_4) \\ - \rho_2 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_4) (\cos 2\phi_2 - \cos 2\phi_3) \\ - \rho_2 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_3 - \phi_1) (\cos 2\phi_2 - \cos 2\phi_4) \\ - \rho_3 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_2) (\cos 2\phi_3 - \cos 2\phi_4)$$

und

$$\begin{aligned}
 & PR_1 - P_1 R \\
 = & -\rho_1 \rho_2 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_3 - \phi_4) (\sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_2) \\
 & -\rho_1 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_4 - \phi_2) (\sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_3) \\
 & -\rho_1 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_2 - \phi_3) (\sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_4) \\
 & -\rho_2 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_4) (\sin 2\phi_2 - \sin 2\phi_3) \\
 & -\rho_2 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_3 - \phi_1) (\sin 2\phi_2 - \sin 2\phi_4) \\
 & -\rho_3 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_2) (\sin 2\phi_3 - \sin 2\phi_4) ;
 \end{aligned}$$

also, wenn man die Differenzen der Cosinus und Sinus in Factoren zerlegt,

$$\begin{aligned}
 & PQ_1 - P_1 Q \\
 = & 2\rho_1 \rho_2 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 + \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\phi_3 - \phi_4) \\
 & + 2\rho_1 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 + \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_3) \sin(\phi_4 - \phi_2) \\
 & + 2\rho_1 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 + \phi_4) \sin(\phi_1 - \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_3) \\
 & + 2\rho_2 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_2 + \phi_3) \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_4) \\
 & + 2\rho_2 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_2 + \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_1) \\
 & + 2\rho_3 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_3 + \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\phi_1 - \phi_2)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & PR_1 - P_1 R \\
 = & 2\rho_1 \rho_2 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\phi_3 - \phi_4) \\
 & + 2\rho_1 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_1 + \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_3) \sin(\phi_4 - \phi_2) \\
 & + 2\rho_1 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_1 + \phi_4) \sin(\phi_1 - \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_3) \\
 & + 2\rho_2 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_2 + \phi_3) \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_4) \\
 & + 2\rho_2 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_2 + \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_1) \\
 & + 2\rho_3 \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_3 + \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\phi_1 - \phi_2) .
 \end{aligned}$$

Setzen wir also der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
 11. \quad M = & \rho_1 \rho_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\phi_3 - \phi_4) \\
 & + \rho_1 \rho_3 \sin(\phi_1 + \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_3) \sin(\phi_4 - \phi_2) \\
 & + \rho_1 \rho_4 \sin(\phi_1 + \phi_4) \sin(\phi_1 - \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_3) \\
 & + \rho_2 \rho_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_4) \\
 & + \rho_2 \rho_4 \sin(\phi_2 + \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_1) \\
 & + \rho_3 \rho_4 \sin(\phi_3 + \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\phi_1 - \phi_2) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad N = & \rho_1 \rho_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\phi_3 - \phi_4) \\
 & + \rho_1 \rho_3 \cos(\phi_1 + \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_3) \sin(\phi_4 - \phi_2) \\
 & + \rho_1 \rho_4 \cos(\phi_1 + \phi_4) \sin(\phi_1 - \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_3) \\
 & + \rho_2 \rho_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_4) \\
 & + \rho_2 \rho_4 \cos(\phi_2 + \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_1) \\
 & + \rho_3 \rho_4 \cos(\phi_3 + \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\phi_1 - \phi_2) ;
 \end{aligned}$$

so ist nach dem Obigen

$$13. \quad \text{tang } 2\theta = \frac{M}{N},$$

ein seiner Form wegen gewiss sehr merkwürdiger Ausdruck.

4.

Ferner erhält man aus dem vorigen Paragraphen

$$14. \quad \begin{cases} 1-\varepsilon = \frac{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2)}{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_1)^2 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2}, \\ 1-\varepsilon = \frac{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3)}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_4)^2}; \end{cases}$$

also

$$15. \quad \begin{cases} \varepsilon = - \frac{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_1)^2 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3)^2}{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_1)^2 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2}, \\ \varepsilon = - \frac{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3)^2 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_4)^2}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_4)^2}; \end{cases}$$

also

$$16. \quad \begin{cases} 1+\varepsilon = - \frac{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_1) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3)}{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_1)^2 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2}, \\ 1+\varepsilon = - \frac{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_4)}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_4)^2}. \end{cases}$$

Auch ist

$$17. \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} = \frac{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2)}{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_1) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3)}, \\ \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} = \frac{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3)}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_4)}. \end{cases}$$

Berechnet man die Hülfswinkel ψ, ψ_1 mittelst der Formeln

$$18. \quad \begin{cases} \text{tang } \psi = \frac{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2)}{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_1) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3)}, \\ \text{tang } \psi_1 = \frac{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3)}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_4)}; \end{cases}$$

so erhält man ε mittelst der Formeln

$$19. \quad \varepsilon = \text{tang}(45^\circ + \psi), \quad \varepsilon = \text{tang}(45^\circ + \psi_1).$$

5.

Zur Berechnung der Grössen X und Y hat man nach §. 3. die folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$20. \begin{cases} 2X - 2\varepsilon Y \operatorname{tang}(\theta - \phi_1) = -\rho_1 \{ \cos(\theta - \phi_1) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1) \operatorname{tang}(\theta - \phi_1) \} , \\ 2X - 2\varepsilon Y \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) = -\rho_2 \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) \} , \\ 2X - 2\varepsilon Y \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) = -\rho_3 \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \operatorname{tang}(\theta - \phi_3) \} , \\ 2X - 2\varepsilon Y \operatorname{tang}(\theta - \phi_4) = -\rho_4 \{ \cos(\theta - \phi_4) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_4) \operatorname{tang}(\theta - \phi_4) \} . \end{cases}$$

Aus der ersten und zweiten dieser Gleichungen erhält man z. B.

$$21. \begin{cases} 2X \sin(\phi_1 - \phi_2) = -\rho_1 \sin(\theta - \phi_2) \{ \cos(\theta - \phi_1)^2 + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1)^2 \} \\ \quad + \rho_2 \sin(\theta - \phi_1) \{ \cos(\theta - \phi_2)^2 + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2)^2 \} , \\ 2\varepsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = -\rho_1 \cos(\theta - \phi_2) \{ \cos(\theta - \phi_1)^2 + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1)^2 \} \\ \quad + \rho_2 \cos(\theta - \phi_1) \{ \cos(\theta - \phi_2)^2 + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2)^2 \} . \end{cases}$$

Um sich die Rechnung nach diesen Formeln zu erleichtern, berechne man die beiden Hülfswinkel E_1 und E_2 mittelst der Formeln

$$22. \begin{cases} \operatorname{tang} E_1 = \operatorname{tang}(\theta - \phi_1) \cdot \sqrt{\pm \varepsilon} , \\ \operatorname{tang} E_2 = \operatorname{tang}(\theta - \phi_2) \cdot \sqrt{\pm \varepsilon} ; \end{cases}$$

indem man nämlich die obere oder untere Zeichen nimmt, je nachdem ε positiv oder negativ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} 2X \sin(\phi_1 - \phi_2) &= -\rho_1 \sin(\theta - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1)^2 (1 \pm \operatorname{tang} E_1^2) \\ &\quad + \rho_2 \sin(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2 (1 \pm \operatorname{tang} E_2^2) , \\ 2\varepsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2) &= -\rho_1 \cos(\theta - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1)^2 (1 \pm \operatorname{tang} E_1^2) \\ &\quad + \rho_2 \cos(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2 (1 \pm \operatorname{tang} E_2^2) . \end{aligned}$$

Ist nun ε positiv, und gelten also die oberen Zeichen; so ist

$$\begin{aligned} &2X \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ &= -\frac{\rho_1 \sin(\theta - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1)^2}{\cos E_1^2} + \frac{\rho_2 \sin(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2}{\cos E_2^2} , \\ &2\varepsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ &= -\frac{\rho_1 \cos(\theta - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1)^2}{\cos E_1^2} + \frac{\rho_2 \cos(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2}{\cos E_2^2} . \end{aligned}$$

In diesem Falle wird man also die Grössen

$$23. A = -\frac{\rho_1 \cos(\theta - \phi_1)^2}{\cos E_1^2} , \quad B = \frac{\rho_2 \cos(\theta - \phi_2)^2}{\cos E_2^2}$$

berechnen, und hat dann zur Bestimmung von X und Y die Formeln

$$24. \quad \begin{cases} 2X \sin(\phi_1 - \phi_2) = A \sin(\theta - \phi_2) + B \sin(\theta - \phi_1), \\ 2\epsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = A \cos(\theta - \phi_2) + B \cos(\theta - \phi_1). \end{cases}$$

Ist ϵ negativ, und sind also in den obigen Gleichungen die untern Zeichen zu nehmen; so ist

$$2X \sin(\phi_1 - \phi_2) = - \frac{\rho_1 \sin(\theta - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1)^2 \cos 2E_1}{\cos E_1^2} + \frac{\rho_2 \sin(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2 \cos 2E_2}{\cos E_2^2},$$

$$2\epsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = - \frac{\rho_1 \cos(\theta - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1)^2 \cos 2E_1}{\cos E_1^2} + \frac{\rho_2 \cos(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2 \cos 2E_2}{\cos E_2^2}.$$

In diesem Falle wird man also die Grössen

$$25. \quad A' = - \frac{\rho_1 \cos(\theta - \phi_1)^2 \cos 2E_1}{\cos E_1^2}, \quad B' = \frac{\rho_2 \cos(\theta - \phi_2)^2 \cos 2E_2}{\cos E_2^2}$$

berechnen, und hat dann zur Bestimmung von X und Y die Formeln

$$26. \quad \begin{cases} 2X \sin(\phi_1 - \phi_2) = A' \sin(\theta - \phi_2) + B' \sin(\theta - \phi_1), \\ 2\epsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = A' \cos(\theta - \phi_2) + B' \cos(\theta - \phi_1). \end{cases}$$

Bemerkt mag übrigens noch werden, dass sich für X und Y auch leicht Ausdrücke entwickeln lassen, die ϵ nicht mehr enthalten. Die Gleichungen 21. können nämlich auch auf folgende Art dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{4X \sin(\phi_1 - \phi_2)}{1 + \epsilon} &= - \rho_1 \sin(\theta - \phi_2) \left\{ 1 + \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cos 2(\theta - \phi_1) \right\} \\ &\quad + \rho_2 \sin(\theta - \phi_1) \left\{ 1 + \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cos 2(\theta - \phi_2) \right\}, \\ \frac{4\epsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2)}{1 + \epsilon} &= - \rho_1 \cos(\theta - \phi_2) \left\{ 1 + \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cos 2(\theta - \phi_1) \right\} \\ &\quad + \rho_2 \cos(\theta - \phi_1) \left\{ 1 + \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cos 2(\theta - \phi_2) \right\}. \end{aligned}$$

Führen wir nun aus 17. den Werth von $\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$ in diese Gleichungen ein; so erhalten wir für

$$\frac{4X \sin(\phi_1 - \phi_2)}{1 + \epsilon}$$

einen Bruch, dessen Zähler

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \rho_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3) \{ \cos 2(\theta - \phi_2) - \cos 2(\theta - \phi_1) \} \\
 & + \rho_1 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_2) \{ \cos 2(\theta - \phi_1) - \cos 2(\theta - \phi_3) \} \\
 & + \rho_2 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_1) \{ \cos 2(\theta - \phi_3) - \cos 2(\theta - \phi_2) \} \\
 = & 2\rho_1 \rho_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3) \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_2) \\
 & + 2\rho_1 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_3) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_3) \\
 & + 2\rho_2 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_1) \sin(\phi_3 - \phi_2) \sin(2\theta - \phi_2 - \phi_3) ,
 \end{aligned}$$

und dessen Nenner

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_1) \\
 & + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2) \\
 & + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3)
 \end{aligned}$$

ist. Für

$$\frac{4\varepsilon Y \sin(\phi_1 - \phi_2)}{1 + \varepsilon}$$

erhalten wir einen Bruch, dessen Zähler

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \rho_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3) \{ \cos 2(\theta - \phi_2) - \cos 2(\theta - \phi_1) \} \\
 & + \rho_1 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_2) \{ \cos 2(\theta - \phi_1) - \cos 2(\theta - \phi_3) \} \\
 & + \rho_2 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1) \{ \cos 2(\theta - \phi_3) - \cos 2(\theta - \phi_2) \} \\
 = & 2\rho_1 \rho_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3) \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_2) \\
 & + 2\rho_1 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_3) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_3) \\
 & + 2\rho_2 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1) \sin(\phi_3 - \phi_2) \sin(2\theta - \phi_2 - \phi_3) ,
 \end{aligned}$$

und dessen Nenner der obige ist. Man hat bei dieser Entwicklung zu bemerken, dass

$$\begin{aligned}
 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2) + \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_1) &= - \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3) , \\
 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2) + \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_1) &= - \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3)
 \end{aligned}$$

ist. Multiplicirt man nun die in Rede stehenden Brüche mit dem ersten der Ausdrücke von $1 + \varepsilon$ in 16; so erhält man für $2X$ und $2\varepsilon Y$ zwei Brüche, deren Zähler respective

$$\begin{aligned}
 & - \rho_1 \rho_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_3) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_2) \\
 & - \rho_1 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_2) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_3) \\
 & - \rho_2 \rho_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_1) \sin(2\theta - \phi_2 - \phi_3)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & - \rho_1 \rho_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \cos(\theta - \phi_3) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_2) \\
 & - \rho_1 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_2) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_3) \\
 & - \rho_2 \rho_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1) \sin(2\theta - \phi_2 - \phi_3)
 \end{aligned}$$

sind, und deren gemeinschaftlicher Nenner

$$\begin{aligned} & \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_1)^2 \\ & + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2)^2 \\ & + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2 \end{aligned}$$

ist. Für $2Y$ erhält man endlich mit Hülfe von 15. einen Bruch, dessen Zähler

$$\begin{aligned} & \rho_1 \rho_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \cos(\theta - \phi_3) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_2) \\ & + \rho_1 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_2) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_3) \\ & + \rho_2 \rho_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_1) \sin(2\theta - \phi_2 - \phi_3) \end{aligned}$$

und dessen Nenner

$$\begin{aligned} & \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_1)^2 \\ & + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2 \\ & + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3)^2 \end{aligned}$$

ist.

X und Y sind bekanntlich die Coordinaten des Punktes A in Bezug auf das System der beiden Axen der Ellipse oder Hyperbel, und nach §. 2. sind $r \cos \omega$, $r \sin \omega$ die Coordinaten des Punktes A in Bezug auf das primitive System. Bezeichnen wir nun durch X' , Y' die Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf das primitive System, so hat man nach den aus der analytischen Geometrie bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung in der Ebene die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r \cos \omega &= X' + X \cos \theta - Y \sin \theta, \\ r \sin \omega &= Y' + X \sin \theta + Y \cos \theta; \end{aligned}$$

aus denen man zur Berechnung von X , Y die beiden folgenden Ausdrücke erhält:

$$27. \quad \begin{cases} X' = r \cos \omega - X \cos \theta + Y \sin \theta, \\ Y' = r \sin \omega - X \sin \theta - Y \cos \theta. \end{cases}$$

6.

Die beiden Halbaxen a , b , den halben Parameter und die Excentricität e findet man endlich auf folgende Art. Bekanntlich ist

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1,$$

oder, weil $\varepsilon = \pm \frac{a^2}{b^2}$ ist,

$$X^2 + \varepsilon Y^2 = a^2,$$

und folglich

$$28. \quad a = \sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2},$$

so wie

$$29. \quad b^2 = \pm \frac{a^2}{\varepsilon}, \quad = \frac{a}{\sqrt{\pm \varepsilon}};$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem ε positiv oder negativ ist.

Ferner ist

$$e^2 = a^2 \mp b^2 = a^2 - \frac{a^2}{\varepsilon} = a^2 \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon},$$

und folglich

$$30. \quad e = a \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}}.$$

Endlich ist

$$31. \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Erleichtern kann man sich die Rechnung durch Berechnung eines Hülfswinkels L mittelst der Formel

$$32. \quad \tan L = \frac{Y}{X} \sqrt{\pm \varepsilon}.$$

Ist dann ε positiv, so ist

$$33. \quad a = \frac{X}{\cos L},$$

indem man bloss den absoluten Werth des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens berücksichtigt. Ist dagegen ε negativ, so ist

$$34. \quad a = \frac{X}{\cos L} \sqrt{\cos 2L},$$

indem man wieder bloss den absoluten Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens berücksichtigt.

Wenn ε positiv ist, so hat man auch die folgenden Formeln:

$$35. \quad b = \frac{Y}{\sin L}, \quad p = \frac{X}{\varepsilon \cos L}, \quad e = \sqrt{a(a-p)}.$$

Wenn dagegen ε negativ ist, so ist

$$36. \quad b = \frac{Y}{\sin L} \sqrt{\cos 2L}, \quad p = \frac{X}{\varepsilon \cos L} \sqrt{\cos 2L}, \quad e = \sqrt{a(a+p)},$$

indem man immer bloss die absoluten Werthe der Grössen rechts von den Gleichheitszeichen berücksichtigt.

7.

Über die vorhergehende Auflösung sind nun aber noch die folgenden wichtigen Bemerkungen zu machen.

Da man von dem Winkel θ nur so viel weiss, dass derselbe positiv und nicht grösser als 360° ist; so weiss man von dem Winkel 2θ , welcher durch die Formel

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{M}{N}$$

bestimmt wird, nur so viel, dass derselbe positiv und nicht grösser als 720° ist. Bezeichnen wir also den kleinsten positiven Winkel, dessen Tangente $\frac{M}{N}$ ist, durch 2α ; so sind

$$2\alpha, 2\alpha + 180^\circ, 2\alpha + 360^\circ, 2\alpha + 540^\circ$$

die vier Werthe, welche 2θ , und also

$$\alpha, \alpha + 90^\circ, \alpha + 180^\circ, \alpha + 270^\circ$$

die vier Werthe, welche θ haben kann. Bezeichnen wir nun den dem Werthe α von θ entsprechenden Werth von $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$ durch $\frac{F}{H}$; so sind nach den Formeln 17. die den

obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$ offenbar

$$\frac{F}{H}, -\frac{F}{H}, \frac{F}{H}, -\frac{F}{H};$$

und die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von ε sind also

$$\frac{H+F}{H-F}, \frac{H-F}{H+F}, \frac{H+F}{H-F}, \frac{H-F}{H+F};$$

d. i. wenn wir den dem Werthe α von θ entsprechenden Werth von ε durch ε selbst bezeichnen,

$$\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}.$$

Bezeichnen wir nun ferner die dem Werthe α von θ entsprechenden Werthe von X , Y durch diese Symbole selbst; so erhält man mittelst der Formeln 21. für die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von X , Y die folgenden Ausdrücke:

$$X, Y; Y, -X; -X, -Y; -Y, X.$$

Für die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von X' , Y' erhält man nach 27.

$$r \cos \omega = X \cos \alpha + Y \sin \alpha,$$

$$r \sin \omega = X \sin \alpha - Y \cos \alpha;$$

$$r \cos \omega = Y \cos(\alpha + 90^\circ) - X \sin(\alpha + 90^\circ) = r \cos \omega = X \cos \alpha + Y \sin \alpha,$$

$$r \sin \omega = Y \sin(\alpha + 90^\circ) + X \cos(\alpha + 90^\circ) = r \sin \omega = X \sin \alpha - Y \cos \alpha;$$

$$r \cos \omega + X \cos(\alpha + 180^\circ) - Y \sin(\alpha + 180^\circ) = r \cos \omega = X \cos \alpha + Y \sin \alpha,$$

$$r \sin \omega + X \sin(\alpha + 180^\circ) + Y \cos(\alpha + 180^\circ) = r \sin \omega = X \sin \alpha - Y \cos \alpha;$$

$$r \cos \omega + Y \cos(\alpha + 270^\circ) + X \sin(\alpha + 270^\circ) = r \cos \omega = X \cos \alpha + Y \sin \alpha,$$

$$r \sin \omega + Y \sin(\alpha + 270^\circ) - X \cos(\alpha + 270^\circ) = r \sin \omega = X \sin \alpha - Y \cos \alpha.$$

Also erhält man in allen Fällen für X' , Y' , d. h. für die Coordinaten des Mittelpunkts der gesuchten Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf das primitive System immer ganz dieselben Werthe.

Für die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von a , b erhält man endlich mittelst des Vorhergehenden leicht die folgenden Ausdrücke:

$$\sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2}, \quad \sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\pm \varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\varepsilon}}, \quad \sqrt{\pm(X^2 + \varepsilon Y^2)};$$

$$\sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2}, \quad \sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\pm \varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\varepsilon}}, \quad \sqrt{\pm(X^2 + \varepsilon Y^2)}.$$

Ist nun zuerst ε positiv und der gesuchte Kegelschnitt also eine Ellipse; so sind die Ausdrücke

$$\sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2}, \quad \sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\varepsilon}}, \quad \sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2};$$

$$\sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2}, \quad \sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\varepsilon}}, \quad \sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2}$$

offenbar sämmtlich reell, und die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von a , b sind also, wenn wir durch diese Symbole selbst die dem Werthe a von θ entsprechenden Werthe von a , b bezeichnen:

$$a, b; \quad b, a; \quad a, b; \quad b, a.$$

Überlegt man nun, dass nach dem Obigen den vier Werthen

$$a, \quad a + 90^\circ, \quad a + 180^\circ, \quad a + 270^\circ$$

von θ immer ganz dieselben Werthe von X' , Y' entsprechen, und dass durch die vier in Rede stehenden Werthe von θ offenbar bloss zwei sich rechtwinklig schneidende gerade Linien bestimmt werden; so ist aus allem Vorhergehenden klar, dass man, welchen der obigen vier Werthe von θ man auch für θ setzen mag, doch immer ganz dieselbe Ellipse erhalten wird, wenn man nur die Werthe von a , b dem für θ gesetzten Werthe gemäss richtig bestimmt.

Wenn nun aber ferner ε negativ und der gesuchte Kegelschnitt also eine Hyperbel ist; so ist klar, dass immer bloss entweder das erste und dritte, oder das zweite und vierte Paar der Ausdrücke

$$\sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2}, \sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{-\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\varepsilon}}, \sqrt{-(X^2 + \varepsilon Y^2)};$$

$$\sqrt{X^2 + \varepsilon Y^2}, \sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{-\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X^2 + \varepsilon Y^2}{\varepsilon}}, \sqrt{-(X^2 + \varepsilon Y^2)}$$

für die beiden Halbaxen reelle Werthe liefert, wodurch uns ein Criterium gegeben ist, mittelst dessen man immer sicher erkennen kann, welche Werthe man bloss für θ setzen darf. Dass es aber völlig gleichgültig ist, welchen der beiden Werthe a , $a+180^\circ$ oder $a+90^\circ$, $a+270^\circ$ man für θ setzt, liegt deutlich vor Augen.

8.

In dem Vorhergehenden ist die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe enthalten. Es kommt nun aber, was bei diesem Gegenstande von ganz besonderer Bedeutung ist, darauf an, einige specielle Fälle, in denen die gegebene Auflösung anwendbar zu seyn aufhört, einer sorgfältigen Untersuchung zu unterwerfen.

Zuvörderst ist klar, dass die im Vorhergehenden gegebene Auflösung auf der Stelle ihre Anwendbarkeit völlig verliert, wenn zu gleicher Zeit

$$M = 0, N = 0$$

ist, indem dann der Winkel 2θ mittelst der Formel

$$\tan 2\theta = \frac{M}{N}$$

nicht mehr bestimmt werden kann. Wenn aber zu gleicher Zeit $M=0$, $N=0$ ist; so ist, wie aus §. 3. sogleich erhellet, auch zu gleicher Zeit

$$PQ_1 - P_1Q = 0, PR_1 - P_1R = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen auf gewöhnliche Weise zuerst P_1 , dann P ; so erhält man die beiden Gleichungen

$$P(QR_1 - Q_1R) = 0, P_1(QR_1 - Q_1R) = 0,$$

und es ist also entweder

$$P = 0, P_1 = 0;$$

oder

$$QR_1 - Q_1R = 0.$$

Jeden dieser beiden Fälle wollen wir nun für sich betrachten.

9.

Sey also zuerst zu gleicher Zeit

$$P = \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) = 0,$$

$$P_1 = \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) = 0.$$

In diesem Falle wird den beiden Gleichungen 9. und 9.* in §. 3., auf die bei unserer Auflösung bekanntlich Alles ankommt, für jedes θ genügt, wenn man $\varepsilon=1$ setzt, woraus man sogleich schliesst, dass im vorliegenden Falle der gesuchte Kegelschnitt ein Kreis seyn wird. Zur Bestimmung von X, Y geben die Gleichungen 21.

$$2X \sin(\phi_1 - \phi_2) = -\rho_1 \sin(\theta - \phi_2) + \rho_2 \sin(\theta - \phi_1),$$

$$2Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = -\rho_1 \cos(\theta - \phi_2) + \rho_2 \cos(\theta - \phi_1);$$

oder, weil es jetzt offenbar verstatet ist $\theta=0$ zu setzen,

$$2X \sin(\phi_1 - \phi_2) = \rho_1 \sin \phi_2 - \rho_2 \sin \phi_1,$$

$$2Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = -\rho_1 \cos \phi_2 + \rho_2 \cos \phi_1.$$

Weil nun bekanntlich nicht $\sin(\phi_1 - \phi_2) = 0$ ist; so liefern diese Ausdrücke für X und Y jederzeit endliche völlig bestimmte Werthe. Für X', Y' erhält man nach 27., wenn man, wie es erforderlich ist, $\theta=0$ setzt, die Ausdrücke

$$X' = r \cos \omega - X, \quad Y' = r \sin \omega - Y;$$

welche für X' und Y' ebenfalls jederzeit endliche völlig bestimmte Werthe liefern, so dass also der Mittelpunkt unsers Kreises als völlig bestimmt anzusehen ist. Endlich erhält man nach 28. und 29., wenn man, wie es erforderlich ist, $\varepsilon=1$ setzt,

$$a = b = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

so dass also auch der Halbmesser unsers Kreises, und dieser Kreis daher selbst nun völlig bestimmt ist.

Fragen kann man endlich noch, ob nicht vielleicht $a=b=0$ werden kann. Wäre aber $a=b=0$; so wäre $X^2 + Y^2 = 0$, und folglich $X=0, Y=0$, d.i. nach dem Obigen

$$\rho_1 \sin \phi_2 - \rho_2 \sin \phi_1 = 0, \quad -\rho_1 \cos \phi_2 + \rho_2 \cos \phi_1 = 0.$$

Eliminirt man aber aus diesen beiden Gleichungen ρ_2 auf gewöhnliche Weise; so erhält man

$$\rho_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) = 0,$$

und folglich $\sin(\phi_1 - \phi_2) = 0$, welches gegen die Voraussetzung ist. Daher kann nie $a=b=0$ seyn. Kaum bedarf es wohl einer besondern Bemerkung, dass niemals eine der Grössen $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ verschwindet, weil ja sonst einer der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 mit dem Punkte A zusammenfallen würde, und also nicht fünf, sondern bloss vier Punkte gegeben wären.

10.

Wenn ferner

$$QR_1 - Q_1R = 0$$

ist; so wird den beiden Gleichungen

$$\rho_1 \sin(\phi_1 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_1) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3) = 0,$$

$$\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2(\theta - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_3) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2(\theta - \phi_4) = 0$$

offenbar zugleich genügt, wenn man θ mittelst einer der beiden Formeln

$$\operatorname{tang} 2\theta = - \frac{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2\phi_1 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2\phi_3}{\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin 2\phi_1 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin 2\phi_3},$$

$$\operatorname{tang} 2\theta = - \frac{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2\phi_3 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2\phi_4}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin 2\phi_3 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin 2\phi_4}$$

bestimmt, welches aber nur dann möglich seyn wird, wenn, wie wir für jetzt annehmen wollen, die Zähler und Nenner der beiden vorstehenden Brüche nicht zugleich verschwinden. Hat man nun θ auf diese Weise bestimmt, so wird den beiden Gleichungen 9. und 9.* in §. 3. genügt, wenn man $\varepsilon = -1$ setzt, woraus man sogleich schliesst, dass im vorliegenden Falle der gesuchte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel seyn wird. Zur Bestimmung von X und Y hat man nach 21., wenn man $\varepsilon = -1$ setzt,

$$2X \sin(\phi_1 - \phi_2) = - \rho_1 \sin(\theta - \phi_2) \{ \cos(\theta - \phi_1)^2 - \sin(\theta - \phi_1)^2 \} \\ + \rho_2 \sin(\theta - \phi_1) \{ \cos(\theta - \phi_2)^2 - \sin(\theta - \phi_2)^2 \},$$

$$2Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = \rho_1 \cos(\theta - \phi_2) \{ \cos(\theta - \phi_1)^2 - \sin(\theta - \phi_1)^2 \} \\ - \rho_2 \cos(\theta - \phi_1) \{ \cos(\theta - \phi_2)^2 - \sin(\theta - \phi_2)^2 \};$$

d. i.

$$2X \sin(\phi_1 - \phi_2) = - \rho_1 \sin(\theta - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_1) + \rho_2 \sin(\theta - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2),$$

$$2Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = \rho_1 \cos(\theta - \phi_2) \cos 2(\theta - \phi_1) - \rho_2 \cos(\theta - \phi_1) \cos 2(\theta - \phi_2);$$

und diese Formeln liefern, weil nicht $\sin(\phi_1 - \phi_2) = 0$ ist, für X und Y immer endliche völlig bestimmte Werthe. Zur Bestimmung von X' und Y' hat man nach 27. die Formeln

$$X' = r \cos \omega - X \cos \theta + Y \sin \theta,$$

$$Y' = r \sin \omega - X \sin \theta - Y \cos \theta;$$

die für X' , Y' auch jederzeit endliche völlig bestimmte Werthe liefern, so dass also der Mittelpunkt unserer gleichseitigen Hyperbel als völlig bestimmt anzusehen ist. Zu bemerken ist übrigens, dass man für θ eigentlich vier Werthe, und also auch vier Paare von Werthen von X , Y erhält, welches aber, wie aus §. 7. hervorgeht, auf die Bestimmung von X' , Y' gar keinen Einfluss hat. Nehmen wir nun aber an, dass die Grössen X , Y mittelst des kleinsten der vier Werthe von θ bestimmt worden sind; so sind nach §. 7. die den vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von a , b :

$$\sqrt{X^2 - Y^2}, \quad \sqrt{X^2 - Y^2};$$

$$\sqrt{-(X^2 - Y^2)}, \quad \sqrt{-(X^2 - Y^2)};$$

$$\sqrt{X^2 - Y^2}, \quad \sqrt{X^2 - Y^2};$$

$$\sqrt{-(X^2 - Y^2)}, \quad \sqrt{-(X^2 - Y^2)};$$

und man muss nun für θ jederzeit einen der beiden Werthe setzen, welche für a , b reelle Werthe liefern.

Auch

Auch hier kann man wieder die Frage aufwerfen, ob nicht $a=b=0$ seyn kann. Es erhellet aber, dass eine gleichseitige Hyperbel sich ihren Asymptoten desto mehr nähert, je kleiner ihre Axen sind, und dass also eine gleichseitige Hyperbel, deren Axen verschwinden, als mit ihren Asymptoten zusammenfallend zu betrachten ist. Sollte also $a=b=0$ seyn; so müssten die fünf gegebenen Punkte offenbar in zwei geraden Linien liegen, welches gegen die Voraussetzung streitet. Daher kann nicht $a=b=0$ seyn.

Vorzüglich ist nun aber noch der Fall zu betrachten, wenn

$$\begin{aligned} \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2\phi_1 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos 2\phi_3 &= 0, \\ \rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin 2\phi_1 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin 2\phi_3 &= 0, \\ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos 2\phi_3 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos 2\phi_4 &= 0, \\ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin 2\phi_2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin 2\phi_3 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin 2\phi_4 &= 0 \end{aligned}$$

ist, vorausgesetzt, dass diese vier Gleichungen zusammen existiren können, worüber wir uns sogleich in's Klare zu setzen suchen wollen. Eliminirt man aus den beiden ersten Gleichungen ρ_1 , aus den beiden letzten ρ_4 auf gewöhnliche Weise; so erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin 2(\phi_1 - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin 2(\phi_1 - \phi_3) &= 0, \\ \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin 2(\phi_4 - \phi_2) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin 2(\phi_4 - \phi_3) &= 0; \end{aligned}$$

aus denen sich ferner leicht die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \{\rho_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - \rho_3 \cos(\phi_1 - \phi_3)\} \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_3) &= 0, \\ \{\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_4) - \rho_3 \cos(\phi_3 - \phi_4)\} \sin(\phi_2 - \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_4) &= 0 \end{aligned}$$

ergeben. Weil nun nach der Voraussetzung keine der Grössen

$$\sin(\phi_1 - \phi_2), \sin(\phi_1 - \phi_3), \sin(\phi_2 - \phi_4), \sin(\phi_3 - \phi_4)$$

verschwindet; so ist

$$\begin{aligned} \rho_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - \rho_3 \cos(\phi_1 - \phi_3) &= 0, \\ \rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_4) - \rho_3 \cos(\phi_3 - \phi_4) &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen ρ_3 ; so erhält man die Gleichung

$$\cos(\phi_1 - \phi_2) \cos(\phi_3 - \phi_4) - \cos(\phi_1 - \phi_3) \cos(\phi_2 - \phi_4) = 0,$$

welche sich leicht auf die Form

$$\sin(\phi_1 - \phi_4) \sin(\phi_2 - \phi_3) = 0$$

bringen lässt. Also müsste entweder $\sin(\phi_1 - \phi_4)=0$, oder $\sin(\phi_2 - \phi_3)=0$ seyn, welches Beides gegen die Voraussetzung ist. Daher können die vier obigen Gleichungen nie zusammen existiren, und die Bestimmung von θ mittelst der oben gegebenen Formeln ist daher jederzeit möglich, so dass es folglich im vorliegenden Falle, wenn nämlich $QR_1 - Q_1R=0$ ist, immer eine durch die fünf gegebenen Punkte, von denen nicht drei in einer geraden Linie liegen, gehende gleichseitige Hyperbel gegeben wird.

11.

Wir wollen uns jetzt noch die Frage stellen, ob zu gleicher Zeit

$$P = 0, \quad P_1 = 0, \quad QR_1 - Q_1R = 0$$

seyn kann. Nehmen wir diese Gleichungen als erfüllt an, bestimmen aus der ersten $\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3)$, aus der zweiten $\rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3)$, und führen die erhaltenen Ausdrücke respective in die Brüche $\frac{Q}{R}$ und $\frac{Q_1}{R_1}$ ein; so erhalten wir

$$\frac{Q}{R} = \frac{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) (\cos 2\phi_2 - \cos 2\phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) (\cos 2\phi_3 - \cos 2\phi_1)}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) (\sin 2\phi_2 - \sin 2\phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) (\sin 2\phi_3 - \sin 2\phi_1)},$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) (\cos 2\phi_2 - \cos 2\phi_3) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) (\cos 2\phi_3 - \cos 2\phi_4)}{\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) (\sin 2\phi_2 - \sin 2\phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) (\sin 2\phi_3 - \sin 2\phi_4)};$$

und folglich, wenn wir die Differenzen der Cosinus und Sinus in Factoren zerlegen,

$$\frac{Q}{R} = - \frac{\{\rho_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) - \rho_3 \sin(\phi_1 + \phi_3)\} \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_3)}{\{\rho_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) - \rho_3 \cos(\phi_1 + \phi_3)\} \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_3)};$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = - \frac{\{\rho_2 \sin(\phi_2 + \phi_4) - \rho_3 \sin(\phi_3 + \phi_4)\} \sin(\phi_2 - \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_4)}{\{\rho_2 \cos(\phi_2 + \phi_4) - \rho_3 \cos(\phi_3 + \phi_4)\} \sin(\phi_2 - \phi_4) \sin(\phi_3 - \phi_4)};$$

also, weil keine der Grössen

$$\sin(\phi_1 - \phi_2), \quad \sin(\phi_1 - \phi_3), \quad \sin(\phi_2 - \phi_4), \quad \sin(\phi_3 - \phi_4)$$

verschwindet,

$$\frac{Q}{R} = - \frac{\rho_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) - \rho_3 \sin(\phi_1 + \phi_3)}{\rho_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) - \rho_3 \cos(\phi_1 + \phi_3)}, \quad \frac{Q_1}{R_1} = - \frac{\rho_2 \sin(\phi_2 + \phi_4) - \rho_3 \sin(\phi_3 + \phi_4)}{\rho_2 \cos(\phi_2 + \phi_4) - \rho_3 \cos(\phi_3 + \phi_4)}.$$

Weil nun nach der dritten der drei Gleichungen, von denen wir ausgegangen sind,

$$\frac{Q}{R} = \frac{Q_1}{R_1}$$

ist, so ist

$$\frac{\rho_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) - \rho_3 \sin(\phi_1 + \phi_3)}{\rho_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) - \rho_3 \cos(\phi_1 + \phi_3)} = \frac{\rho_2 \sin(\phi_2 + \phi_4) - \rho_3 \sin(\phi_3 + \phi_4)}{\rho_2 \cos(\phi_2 + \phi_4) - \rho_3 \cos(\phi_3 + \phi_4)}.$$

Multiplicirt man über's Kreuz; so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen

$$0 = \rho_2 \rho_2 \sin(\phi_1 - \phi_4) + \rho_3 \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_4) - \rho_2 \rho_3 \{\sin(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4) + \sin(\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4)\},$$

und folglich, wenn man die Summe der beiden Sinus im letzten Gliede in Factoren zerlegt,

$$0 = \{\rho_2 \rho_2 + \rho_3 \rho_3 - 2\rho_2 \rho_3 \cos(\phi_2 - \phi_3)\} \sin(\phi_1 - \phi_4);$$

also, weil nicht $\sin(\phi_1 - \phi_4) = 0$ ist,

$$\rho_2 \rho_2 + \rho_3 \rho_3 - 2\rho_2 \rho_3 \cos(\phi_2 - \phi_3) = 0.$$

Nach §. 3. sind

$$\rho_2 \cos \phi_2, \quad \rho_2 \sin \phi_2 \quad \text{und} \quad \rho_3 \cos \phi_3, \quad \rho_3 \sin \phi_3$$

die Coordinaten der Punkte A_2 und A_3 in Bezug auf das secundäre System, dessen Anfangspunkt A ist; also ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie

$$A_2 A_3^2 = (\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_3 \cos \phi_3)^2 + (\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_3 \sin \phi_3)^2,$$

d. i., wie man nach leichter Entwicklung findet,

$$A_2 A_3^2 = \rho_2 \rho_2 + \rho_3 \rho_3 - 2\rho_2 \rho_3 \cos(\phi_2 - \phi_3),$$

und folglich nach dem Obigen $A_2 A_3 = 0$, welches ungereimt ist, weil, wenn dies der Fall wäre, die Punkte A_2 und A_3 mit einander zusammenfallen, folglich nicht fünf, sondern nur vier Punkte gegeben seyn würden. Hieraus sieht man also, dass nie zugleich

$$P = 0, \quad P_1 = 0, \quad QR_1 - Q_1 R = 0$$

seyn kann.

12.

Wir wollen jetzt annehmen, dass nicht zugleich $M=0$, $N=0$ sey, und dass man also für $\tan 2\theta$ einen bestimmten Werth erhalten habe. Dies vorausgesetzt, hört nun ferner die im Obigen gegebene Auflösung in drei Fällen auf, anwendbar zu seyn: wenn ε unendlich wird, wenn ε verschwindet, und wenn keiner der beiden Ausdrücke 15. für ε einen bestimmten Werth liefert, so dass nämlich die Zähler und Nenner der beiden Brüche, durch welche in 15. die Grösse ε dargestellt worden ist, sämtlich verschwinden. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass die beiden ersten dieser drei Fälle in *einen* zusammenfallen. Da nämlich θ bekanntlich vier Werthe hat, die im Obigen durch

$$\alpha, \quad \alpha + 90^\circ, \quad \alpha + 180^\circ, \quad \alpha + 270^\circ$$

bezeichnet worden sind, und nach §. 7.

$$\varepsilon, \quad \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon, \quad \frac{1}{\varepsilon}$$

die diesen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe der im Allgemeinen durch ε bezeichneten Grösse sind; so ist klar, dass, wenn für die beiden Werthe $\alpha, \alpha + 180^\circ$ von θ die Grösse ε unendlich oder Null wird, diese Grösse für die beiden Werthe $\alpha + 90^\circ, \alpha + 270^\circ$ von θ jederzeit respective Null oder unendlich werden wird. Wir wollen daher im Folgenden auch bloss den Fall betrachten, wenn ε unendlich wird, und wollen die beiden Werthe von θ , für welche ε diesen Werth erhält, durch θ und $\theta + 180^\circ$ bezeichnen, weil aus dem Vorhergehenden sich ganz unzweideutig ergibt, dass diese beiden Werthe von θ um 180° von einander verschieden sind.

Wenn nun, um den letzten der drei oben erwähnten Fälle zuerst in der Kürze zu betrachten,

$$\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_1)^2 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3)^2 = 0,$$

$$\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_1)^2 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2 = 0,$$

$$\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \cos(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3)^2 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_4)^2 = 0,$$

$$\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_4)^2 = 0$$

ist; so ist, wie man sogleich findet, wenn man die beiden ersten und die beiden letzten dieser vier Gleichungen zu einander addirt,

$$\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) = 0 ,$$

$$\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) = 0 ;$$

d. i. $P=0$, $P_1=0$, und dieser Fall daher von dem in §. 9. betrachteten Falle nicht verschieden, was uns weiterer Entwicklungen in dieser Beziehung überhebt.

Wenn ferner ε unendlich wird; so ist nach 15.

$$\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_1)^2 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2 = 0 ,$$

$$\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4) \sin(\theta - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3)^2 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_4)^2 = 0 ;$$

und diesen beiden Gleichungen wird sowohl durch θ , als auch durch $\theta+180^\circ$ genügt. In diesem Falle kann man nun zeigen, dass sich durch die fünf gegebenen Punkte eine Parabel beschreiben lässt. Um dies zu zeigen, wollen wir annehmen, dass die fünf gegebenen Punkte A, A_1, A_2, A_3, A_4 wirklich in einer Parabel liegen. Den Parameter dieser Parabel wollen wir durch p bezeichnen. Die Coordinaten der fünf gegebenen Punkte in Bezug auf den Scheitel der Parabel als Anfang und die Axe der Parabel als Axe der positiven Abscissen sollen durch

$$X, X_1, X_2, X_3, X_4 ;$$

$$Y, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$$

bezeichnet werden. Denken wir uns durch den Scheitel der Parabel ein mit dem primitiven paralleles Coordinatensystem gelegt; so soll der 180° nicht übersteigende Winkel, welchen die Axe der Parabel mit dem positiven Theile der Abscissenaxe dieses Systems einschliesst, indem man übrigens diesen Winkel auf gewöhnliche Weise nimmt, durch θ' bezeichnet werden. Die Coordinaten des Scheitels der Parabel in Bezug auf das primitive System wollen wir endlich durch X', Y' bezeichnen. Dies vorausgesetzt, wird man sich nun mit Hülfe von §. 3. leicht von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen überzeugen:

$$\{Y' - \rho_1 \sin(\theta' - \phi_1)\}^2 - p\{X' + \rho_1 \cos(\theta' - \phi_1)\} = 0 ,$$

$$\{Y' - \rho_2 \sin(\theta' - \phi_2)\}^2 - p\{X' + \rho_2 \cos(\theta' - \phi_2)\} = 0 ,$$

$$\{Y' - \rho_3 \sin(\theta' - \phi_3)\}^2 - p\{X' + \rho_3 \cos(\theta' - \phi_3)\} = 0 ,$$

$$\{Y' - \rho_4 \sin(\theta' - \phi_4)\}^2 - p\{X' + \rho_4 \cos(\theta' - \phi_4)\} = 0 ,$$

$$Y'^2 - pX' = 0 .$$

Zieht man von jeder der vier ersten dieser Gleichungen die fünfte ab, und dividirt nach der Reihe durch $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$; so erhält man die vier folgenden Gleichungen:

$$37. \begin{cases} 2Y' \sin(\theta' - \phi_1) - \rho_1 \sin(\theta' - \phi_1)^2 + p \cos(\theta' - \phi_1) = 0 , \\ 2Y' \sin(\theta' - \phi_2) - \rho_2 \sin(\theta' - \phi_2)^2 + p \cos(\theta' - \phi_2) = 0 , \\ 2Y' \sin(\theta' - \phi_3) - \rho_3 \sin(\theta' - \phi_3)^2 + p \cos(\theta' - \phi_3) = 0 , \\ 2Y' \sin(\theta' - \phi_4) - \rho_4 \sin(\theta' - \phi_4)^2 + p \cos(\theta' - \phi_4) = 0 . \end{cases}$$

Multiplirt man nun die drei ersten dieser Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\phi_2 - \phi_3) , \sin(\phi_3 - \phi_1) , \sin(\phi_1 - \phi_2) ;$$

die drei letzten nach der Reihe mit

$$\sin(\phi_3 - \phi_4), \sin(\phi_4 - \phi_2), \sin(\phi_2 - \phi_3);$$

und addirt dann sowohl die drei ersten, als auch die drei letzten zu einander; so erhält man, weil, wie man leicht findet, wenn man nach bekannten goniometrischen Formeln die Producte der Sinus und Cosinus in Summen oder Differenzen auflöst,

$$\sin(\phi_2 - \phi_3)\sin(\theta' - \phi_1) + \sin(\phi_3 - \phi_1)\sin(\theta' - \phi_2) + \sin(\phi_1 - \phi_2)\sin(\theta' - \phi_3) = 0,$$

$$\sin(\phi_2 - \phi_3)\cos(\theta' - \phi_1) + \sin(\phi_3 - \phi_1)\cos(\theta' - \phi_2) + \sin(\phi_1 - \phi_2)\cos(\theta' - \phi_3) = 0;$$

$$\sin(\phi_3 - \phi_4)\sin(\theta' - \phi_2) + \sin(\phi_4 - \phi_2)\sin(\theta' - \phi_3) + \sin(\phi_2 - \phi_3)\sin(\theta' - \phi_4) = 0,$$

$$\sin(\phi_3 - \phi_4)\cos(\theta' - \phi_2) + \sin(\phi_4 - \phi_2)\cos(\theta' - \phi_3) + \sin(\phi_2 - \phi_3)\cos(\theta' - \phi_4) = 0$$

ist, die beiden Gleichungen

$$\rho_1 \sin(\phi_2 - \phi_3)\sin(\theta' - \phi_1)^2 + \rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_1)\sin(\theta' - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_1 - \phi_2)\sin(\theta' - \phi_3)^2 = 0,$$

$$\rho_2 \sin(\phi_3 - \phi_4)\sin(\theta' - \phi_2)^2 + \rho_3 \sin(\phi_4 - \phi_2)\sin(\theta' - \phi_3)^2 + \rho_4 \sin(\phi_2 - \phi_3)\sin(\theta' - \phi_4)^2 = 0;$$

und sieht also, dass die Möglichkeit der Beschreibung einer Parabel durch die fünf gegebenen Punkte, oder die Möglichkeit der Erfüllung der fünf Hauptgleichungen, von denen wir ausgegangen sind, durch die vier Grössen θ, p, X, Y davon abhängt, dass es einen Werth von θ giebt, durch welchen den beiden vorhergehenden Gleichungen zugleich genügt werden kann. Da es nun unter den gemachten Voraussetzungen nach dem Obigen in der That die beiden Werthe $\theta, \theta + 180^\circ$ von θ giebt, durch welche den beiden vorhergehenden Gleichungen zugleich genügt wird; so ist hierdurch die oben behauptete Möglichkeit der Beschreibung einer Parabel durch die fünf gegebenen Punkte im vorliegenden Falle erwiesen. Zur Bestimmung von p und Y erhält man aus den beiden ersten der Gleichungen 37. die Formeln

$$38. \quad p \sin(\phi_1 - \phi_2) = \rho_1 \sin(\theta' - \phi_1)^2 \sin(\theta' - \phi_2) - \rho_2 \sin(\theta' - \phi_2)^2 \sin(\theta' - \phi_1),$$

$$39. \quad 2Y \sin(\phi_1 - \phi_2) = -\rho_1 \sin(\theta' - \phi_1)^2 \cos(\theta' - \phi_2) + \rho_2 \sin(\theta' - \phi_2)^2 \cos(\theta' - \phi_1);$$

welche, weil bekanntlich nicht $\sin(\phi_1 - \phi_2) = 0$ ist, für p und Y immer völlig bestimmte endliche Werthe liefern. Zur Bestimmung von X hat man endlich die Gleichung

$$40. \quad X = \frac{Y^2}{p},$$

welche aber für X nur dann einen endlichen Werth liefert, wenn nicht $p=0$ ist. Ob $p=0$ werden kann, soll nachher untersucht werden; für jetzt wollen wir diesen Fall bei Seite setzen. Für X, Y hat man endlich nach 27. die Ausdrücke

$$41. \quad \begin{cases} X' = r \cos \omega - X \cos \theta' + Y \sin \theta', \\ Y' = r \sin \omega - X \sin \theta' - Y \cos \theta'. \end{cases}$$

Vorzüglich entsteht nun die Frage, ob man $\theta' = \theta$, oder $\theta' = \theta + 180^\circ$ zu setzen hat. Diese Frage lässt sich sehr leicht auf folgende Art beantworten. Für $\theta' = \theta$ erhält man nach 38.

$$p \sin(\phi_1 - \phi_2) = \rho_1 \sin(\theta - \phi_1)^2 \sin(\theta - \phi_2) - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2)^2 \sin(\theta - \phi_1);$$

für $\theta' = \theta + 180^\circ$ erhält man dagegen nach 38.

$$p \sin(\phi_1 - \phi_2) = -\rho_1 \sin(\theta - \phi_1)^2 \sin(\theta - \phi_2) + \rho_2 \sin(\theta - \phi_2)^2 \sin(\theta - \phi_1).$$

Hieraus sieht man, dass den Werthen θ und $\theta + 180^\circ$ von θ , absolut genommen gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte Werthe von p entsprechen. Weil nun p seiner Natur nach positiv ist; so muss man für θ jederzeit den der beiden Werthe θ , $\theta + 180^\circ$ setzen, welcher für p einen positiven Werth liefert.

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten übrig, ob $p=0$ werden kann. Durch Elimination von Y aus je zweien der Gleichungen 37. erhält man die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} p \sin(\phi_1 - \phi_2) &= \{\rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2)\} \sin(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2), \\ p \sin(\phi_1 - \phi_3) &= \{\rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3)\} \sin(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_3), \\ p \sin(\phi_1 - \phi_4) &= \{\rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)\} \sin(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_4), \\ p \sin(\phi_2 - \phi_3) &= \{\rho_2 \sin(\theta - \phi_2) - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3)\} \sin(\theta - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3), \\ p \sin(\phi_2 - \phi_4) &= \{\rho_2 \sin(\theta - \phi_2) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)\} \sin(\theta - \phi_2) \sin(\theta - \phi_4), \\ p \sin(\phi_3 - \phi_4) &= \{\rho_3 \sin(\theta - \phi_3) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)\} \sin(\theta - \phi_3) \sin(\theta - \phi_4). \end{aligned}$$

Wäre nun $p=0$; so wäre

$$\begin{aligned} \{\rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2)\} \sin(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2) &= 0, \\ \{\rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3)\} \sin(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_3) &= 0, \\ \{\rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)\} \sin(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_4) &= 0, \\ \{\rho_2 \sin(\theta - \phi_2) - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3)\} \sin(\theta - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3) &= 0, \\ \{\rho_2 \sin(\theta - \phi_2) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)\} \sin(\theta - \phi_2) \sin(\theta - \phi_4) &= 0, \\ \{\rho_3 \sin(\theta - \phi_3) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4)\} \sin(\theta - \phi_3) \sin(\theta - \phi_4) &= 0. \end{aligned}$$

Zwei der Grössen

$$\sin(\theta - \phi_1), \sin(\theta - \phi_2), \sin(\theta - \phi_3), \sin(\theta - \phi_4)$$

können nicht verschwinden. Wäre nämlich z. B.

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \phi_1) &= \sin \theta \cos \phi_1 - \cos \theta \sin \phi_1 = 0, \\ \sin(\theta - \phi_2) &= \sin \theta \cos \phi_2 - \cos \theta \sin \phi_2 = 0; \end{aligned}$$

so wäre, wie man leicht findet, wenn man aus diesen beiden Gleichungen zuerst $\cos \theta$, dann $\sin \theta$ eliminirt,

$$\sin \theta \sin(\phi_1 - \phi_2) = 0, \cos \theta \sin(\phi_1 - \phi_2) = 0.$$

Weil nun nie zugleich $\sin \theta = 0$, $\cos \theta = 0$ ist; so müsste

$$\sin(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

seyn, welches gegen die Voraussetzung streitet.

Verschwindet eine der vier Grössen

$$\sin(\theta - \phi_1), \sin(\theta - \phi_2), \sin(\theta - \phi_3), \sin(\theta - \phi_4),$$

z. B. die erste; so verschwinden die drei letzten nicht, und nach den sechs obigen Gleichungen hat man also die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\rho_2 \sin(\theta' - \phi_2) - \rho_3 \sin(\theta' - \phi_3) &= 0, \\ \rho_2 \sin(\theta' - \phi_2) - \rho_4 \sin(\theta' - \phi_4) &= 0, \\ \rho_3 \sin(\theta' - \phi_3) - \rho_4 \sin(\theta' - \phi_4) &= 0;\end{aligned}$$

deren letzte eine unmittelbare Folge aus den beiden ersten ist. Die beiden ersten lassen sich auf die Form

$$\begin{aligned}(\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_3 \cos \phi_3) \sin \theta' - (\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_3 \sin \phi_3) \cos \theta' &= 0, \\ (\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_4 \cos \phi_4) \sin \theta' - (\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_4 \sin \phi_4) \cos \theta' &= 0\end{aligned}$$

bringen. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen zuerst $\cos \theta'$, dann $\sin \theta'$; so erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\{(\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_3 \cos \phi_3)(\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_4 \sin \phi_4) - (\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_4 \cos \phi_4)(\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_3 \sin \phi_3)\} \sin \theta' &= 0, \\ \{(\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_3 \cos \phi_3)(\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_4 \sin \phi_4) - (\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_4 \cos \phi_4)(\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_3 \sin \phi_3)\} \cos \theta' &= 0;\end{aligned}$$

und folglich, weil nie zugleich $\sin \theta' = 0$, $\cos \theta' = 0$ ist,

$$(\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_3 \cos \phi_3)(\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_4 \sin \phi_4) - (\rho_2 \cos \phi_2 - \rho_4 \cos \phi_4)(\rho_2 \sin \phi_2 - \rho_3 \sin \phi_3) = 0,$$

d. i., wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\rho_2 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \rho_4 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_3 \rho_4 \sin(\phi_3 - \phi_4) = 0.$$

Hieraus lässt sich leicht schliessen, dass die Punkte A_2, A_3, A_4 in einer geraden Linie liegen. Nehmen wir nämlich an, dass dies der Fall sey, und bezeichnen die Gleichung der geraden Linie $A_2 A_3 A_4$ in Bezug auf das secundäre System durch

$$y = Kx + L;$$

so ist, weil

$$\rho_2 \cos \phi_2, \rho_2 \sin \phi_2; \rho_3 \cos \phi_3, \rho_3 \sin \phi_3; \rho_4 \cos \phi_4, \rho_4 \sin \phi_4$$

die Coordinaten der in Rede stehenden Punkte in Bezug auf das secundäre System sind,

$$\begin{aligned}\rho_2 \sin \phi_2 &= K \rho_2 \cos \phi_2 + L, \\ \rho_3 \sin \phi_3 &= K \rho_3 \cos \phi_3 + L, \\ \rho_4 \sin \phi_4 &= K \rho_4 \cos \phi_4 + L.\end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen K und L ; so erhält man die Gleichung

$$\rho_2 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) + \rho_2 \rho_4 \sin(\phi_4 - \phi_2) + \rho_3 \rho_4 \sin(\phi_3 - \phi_4) = 0,$$

welches die obige ist. Dass aber die drei Punkte A_2, A_3, A_4 in einer geraden Linie liegen, streitet gegen die Voraussetzung, woraus sich unmittelbar ergibt, dass keine der vier Grössen

$$\sin(\theta' - \phi_1), \sin(\theta' - \phi_2), \sin(\theta' - \phi_3), \sin(\theta' - \phi_4)$$

verschwinden kann.

Folglich erhält man aus den sechs obigen Gleichungen die folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}\rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2) &= 0, \\ \rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3) &= 0, \\ \rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4) &= 0, \\ \rho_2 \sin(\theta - \phi_2) - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3) &= 0, \\ \rho_2 \sin(\theta - \phi_2) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4) &= 0, \\ \rho_3 \sin(\theta - \phi_3) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4) &= 0;\end{aligned}$$

die aber offenbar sämmtlich in den drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_2 \sin(\theta - \phi_2) &= 0, \\ \rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_3 \sin(\theta - \phi_3) &= 0, \\ \rho_1 \sin(\theta - \phi_1) - \rho_4 \sin(\theta - \phi_4) &= 0\end{aligned}$$

enthalten sind. Aus diesen Gleichungen schliesst man auf ganz ähnliche Art wie oben, dass sowohl die Punkte A_1, A_2, A_3 , als auch die Punkte A_1, A_2, A_4 ; folglich die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in einer geraden Linie liegen, welches wieder gegen die Voraussetzung streitet.

Nimmt man nun alles Vorhergehende zusammen; so ist klar, dass nie $p=0$ werden kann, und dass sich daher in dem vorliegenden Falle, wenn man nämlich für $\tan 2\theta$ einen bestimmten Werth und ε unendlich oder $=0$ findet, durch die fünf gegebenen Punkte immer eine Parabel beschreiben lässt.

13.

Wenn nun aber auch keiner der bis jetzt betrachteten Fälle, in denen unsere Auflösung der Aufgabe, durch fünf gegebene Punkte, von denen nicht drei in einer geraden Linie liegen, einen Kegelschnitt zu beschreiben, anwendbar zu seyn aufhört, eingetreten ist; so wird diese Auflösung doch auch dann noch ihre Anwendbarkeit verlieren, wenn man $a=0$, und nach §. 7. folglich auch $b=0$ findet. Daher wird es sich jetzt noch fragen, ob, wenn keiner der vorher betrachteten Fälle eingetreten ist, vielleicht noch $a=0$ werden kann. Aus §. 7. erhellet, dass, wenn $a=0$ ist, jederzeit

$$X^2 + \varepsilon Y^2 = 0$$

ist. Diese Gleichung wird aber erfüllt für $X=0, Y=0$, und für $\varepsilon = -\frac{X}{Y}$, wo jedoch zu bemerken ist, dass im letztern Falle weder $X=0$, noch $Y=0$ ist, weil wir angenommen haben, dass keiner der vorher betrachteten Fälle eingetreten, also ε weder unendlich, noch Null geworden ist.

Ist nun zuerst $X=0, Y=0$; so haben wir nach 20. die Gleichungen

$$\begin{aligned}\rho_1 \{ \cos(\theta - \phi_1) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1) \tan(\theta - \phi_1) \} &= 0, \\ \rho_2 \{ \cos(\theta - \phi_2) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2) \tan(\theta - \phi_2) \} &= 0, \\ \rho_3 \{ \cos(\theta - \phi_3) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3) \tan(\theta - \phi_3) \} &= 0, \\ \rho_4 \{ \cos(\theta - \phi_4) + \varepsilon \sin(\theta - \phi_4) \tan(\theta - \phi_4) \} &= 0;\end{aligned}$$

oder

oder

$$\begin{aligned}\cos(\theta - \phi_1)^2 + \varepsilon \sin(\theta - \phi_1)^2 &= 0, \\ \cos(\theta - \phi_2)^2 + \varepsilon \sin(\theta - \phi_2)^2 &= 0, \\ \cos(\theta - \phi_3)^2 + \varepsilon \sin(\theta - \phi_3)^2 &= 0, \\ \cos(\theta - \phi_4)^2 + \varepsilon \sin(\theta - \phi_4)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$\sin(\theta - \phi_1)^2 \cos(\theta - \phi_2)^2 - \cos(\theta - \phi_1)^2 \sin(\theta - \phi_2)^2 = 0,$$

oder

$$\left\{ \sin(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2) + \cos(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2) \right\} \times \left\{ \sin(\theta - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2) - \cos(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2) \right\} = 0,$$

d. i.

$$\sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(2\theta - \phi_1 - \phi_2) = 0,$$

und folglich, weil nicht $\sin(\phi_1 - \phi_2) = 0$ ist,

$$\sin(2\theta - \phi_1 - \phi_2) = 0.$$

Ganz eben so folgt aus der ersten und dritten der vier obigen Gleichungen

$$\sin(2\theta - \phi_1 - \phi_3) = 0,$$

und wir haben daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$\sin 2\theta \cos(\phi_1 + \phi_2) - \cos 2\theta \sin(\phi_1 + \phi_2) = 0,$$

$$\sin 2\theta \cos(\phi_1 + \phi_3) - \cos 2\theta \sin(\phi_1 + \phi_3) = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen zuerst $\cos 2\theta$, dann $\sin 2\theta$; so erhält man

$$\sin 2\theta \sin(\phi_2 - \phi_3) = 0, \quad \cos 2\theta \sin(\phi_2 - \phi_3) = 0,$$

und folglich, weil nicht zugleich $\sin 2\theta = 0$, $\cos 2\theta = 0$ ist, $\sin(\phi_2 - \phi_3) = 0$, welches gegen die Voraussetzung streitet. Daher ist nicht $X=0$, $Y=0$.

Wäre ferner $\varepsilon = -\frac{X^2}{Y^2}$, wo nun weder $X=0$, noch $Y=0$ ist; so hätte man nach 20. die folgenden Gleichungen:

$$2X + \frac{2X^2}{Y} \tan(\theta - \phi_1) = -\rho_1 \left\{ \cos(\theta - \phi_1) - \frac{X^2}{Y^2} \sin(\theta - \phi_1) \tan(\theta - \phi_1) \right\},$$

$$2X + \frac{2X^2}{Y} \tan(\theta - \phi_2) = -\rho_2 \left\{ \cos(\theta - \phi_2) - \frac{X^2}{Y^2} \sin(\theta - \phi_2) \tan(\theta - \phi_2) \right\},$$

$$2X + \frac{2X^2}{Y} \tan(\theta - \phi_3) = -\rho_3 \left\{ \cos(\theta - \phi_3) - \frac{X^2}{Y^2} \sin(\theta - \phi_3) \tan(\theta - \phi_3) \right\},$$

$$2X + \frac{2X^2}{Y} \tan(\theta - \phi_4) = -\rho_4 \left\{ \cos(\theta - \phi_4) - \frac{X^2}{Y^2} \sin(\theta - \phi_4) \tan(\theta - \phi_4) \right\};$$

oder

$$\begin{aligned} 2XY \{ Y \cos(\theta - \phi_1) + X \sin(\theta - \phi_1) \} &= -\rho_1 \{ Y^2 \cos^2(\theta - \phi_1) - X^2 \sin^2(\theta - \phi_1) \}, \\ 2XY \{ Y \cos(\theta - \phi_2) + X \sin(\theta - \phi_2) \} &= -\rho_2 \{ Y^2 \cos^2(\theta - \phi_2) - X^2 \sin^2(\theta - \phi_2) \}, \\ 2XY \{ Y \cos(\theta - \phi_3) + X \sin(\theta - \phi_3) \} &= -\rho_3 \{ Y^2 \cos^2(\theta - \phi_3) - X^2 \sin^2(\theta - \phi_3) \}, \\ 2XY \{ Y \cos(\theta - \phi_4) + X \sin(\theta - \phi_4) \} &= -\rho_4 \{ Y^2 \cos^2(\theta - \phi_4) - X^2 \sin^2(\theta - \phi_4) \}. \end{aligned}$$

Zuerst ist nun zu bemerken, dass nicht zwei der Grössen

$$\begin{aligned} Y \cos(\theta - \phi_1) + X \sin(\theta - \phi_1), \\ Y \cos(\theta - \phi_2) + X \sin(\theta - \phi_2), \\ Y \cos(\theta - \phi_3) + X \sin(\theta - \phi_3), \\ Y \cos(\theta - \phi_4) + X \sin(\theta - \phi_4) \end{aligned}$$

verschwinden können. Wäre nämlich z. B.

$$Y \cos(\theta - \phi_1) + X \sin(\theta - \phi_1) = 0, \quad Y \cos(\theta - \phi_2) + X \sin(\theta - \phi_2) = 0;$$

so erhielte man durch Elimination von Y

$$X \sin(\phi_1 - \phi_2) = 0,$$

und folglich, weil nicht $X=0$ ist, $\sin(\phi_1 - \phi_2) = 0$, welches gegen die Voraussetzung streitet. Daher werden immer drei der vier in Rede stehenden Grössen nicht verschwinden. Sind nun diese nicht verschwindenden Grössen z. B. die drei ersten; so erhält man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 2XY \{ Y \cos(\theta - \phi_1) + X \sin(\theta - \phi_1) \} &= -\rho_1 \{ Y^2 \cos^2(\theta - \phi_1) - X^2 \sin^2(\theta - \phi_1) \}, \\ 2XY \{ Y \cos(\theta - \phi_2) + X \sin(\theta - \phi_2) \} &= -\rho_2 \{ Y^2 \cos^2(\theta - \phi_2) - X^2 \sin^2(\theta - \phi_2) \}, \\ 2XY \{ Y \cos(\theta - \phi_3) + X \sin(\theta - \phi_3) \} &= -\rho_3 \{ Y^2 \cos^2(\theta - \phi_3) - X^2 \sin^2(\theta - \phi_3) \}; \end{aligned}$$

wenn man dieselben nach der Reihe durch die drei nicht verschwindenden Grössen

$$\begin{aligned} Y \cos(\theta - \phi_1) + X \sin(\theta - \phi_1), \\ Y \cos(\theta - \phi_2) + X \sin(\theta - \phi_2), \\ Y \cos(\theta - \phi_3) + X \sin(\theta - \phi_3) \end{aligned}$$

dividirt, die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2XY &= -\rho_1 \{ Y \cos(\theta - \phi_1) - X \sin(\theta - \phi_1) \}, \\ 2XY &= -\rho_2 \{ Y \cos(\theta - \phi_2) - X \sin(\theta - \phi_2) \}, \\ 2XY &= -\rho_3 \{ Y \cos(\theta - \phi_3) - X \sin(\theta - \phi_3) \}; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{2}{\rho_1} &= \frac{\sin(\theta - \phi_1)}{Y} - \frac{\cos(\theta - \phi_1)}{X}, \\ \frac{2}{\rho_2} &= \frac{\sin(\theta - \phi_2)}{Y} - \frac{\cos(\theta - \phi_2)}{X}, \\ \frac{2}{\rho} &= \frac{\sin(\theta - \phi_3)}{Y} - \frac{\cos(\theta - \phi_3)}{X}, \end{aligned}$$

Multiplirt man nun diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\phi_2 - \phi_3), \quad \sin(\phi_3 - \phi_1), \quad \sin(\phi_1 - \phi_2),$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man, weil nach §. 12.

$$\sin(\phi_2 - \phi_3) \sin(\theta - \phi_1) + \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2) + \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta - \phi_3) = 0,$$

$$\sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\theta - \phi_1) + \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos(\theta - \phi_2) + \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\theta - \phi_3) = 0$$

ist, die Gleichung

$$\frac{\sin(\phi_2 - \phi_3)}{\rho_1} + \frac{\sin(\phi_3 - \phi_1)}{\rho_2} + \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{\rho_3} = 0,$$

oder

$$\rho_1 \rho_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \rho_1 \rho_3 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \rho_2 \rho_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) = 0,$$

woraus sich auf ganz ähnliche Art wie in §. 12. ergibt, dass die Punkte A_1, A_2, A_3 in einer geraden Linie liegen, welches wieder gegen die Voraussetzung streitet. Daher

kann nicht $\varepsilon = -\frac{X^2}{Y^2}$, und folglich überhaupt nicht $a=0$ seyn.

Hieraus geht also nun hervor, dass, wenn keiner der im Obigen betrachteten Fälle, in denen unsere Auflösung der Aufgabe, durch fünf gegebene Punkte eine Ellipse oder eine Hyperbel zu beschreiben, anwendbar zu seyn aufhört, eingetreten ist, durch die fünf gegebenen Punkte eine Ellipse oder Hyperbel wirklich beschrieben, und diese Ellipse oder Hyperbel auch mittelst der im Obigen entwickelten Formeln jederzeit vollständig bestimmt werden kann.

B.

Über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne.

1.

Eine Darstellung der Methode, die Doppelsterne zu beobachten und überhaupt die nöthigen Messungen an denselben anzustellen, würde uns an diesem Orte zu weit von unserm eigentlichen Zwecke entfernen. Man findet aber Alles, was man, um das Folgende völlig verstehen zu können, über diesen interessanten Gegenstand zu wissen nöthig hat, in der ihrem Zwecke völlig entsprechenden und in jeder Beziehung sehr zu empfehlenden Schrift *Littrow's: Die Doppelsterne, gemeinfasslich dargestellt. Wien. 1835.* auf eine sehr deutliche Weise entwickelt, weshalb uns hier auf diese Schrift eines unserer ersten deutschen Astronomen und Mathematiker zu verweisen erlaubt seyn mag. Nur so viel wollen wir bemerken, dass unsere Beobachtungen der Doppelsterne sich nicht unmittelbar auf die wahre Bahn des Sternsatelliten um den ruhenden oder den Hauptstern, sondern auf die Projection der Bahn auf einer Ebene, welche auf der Gesichtslinie senkrecht steht, beziehen, und unmittelbar die polaren Coordinaten der Projection des Sternsatelliten in Bezug auf die Projection des ruhenden Sterns als Pol, welche man den *Positionswinkel* und die *Distanz* des Sternsatelli-

ten nennt, geben. Daher zerfällt die Bestimmung der Bahnen der Doppelsterne in zwei wesentlich von einander verschiedene Theile:

1. in die Bestimmung der scheinbaren Bahn, und
2. in die Herleitung der wahren Bahn aus der scheinbaren.

Überhaupt geht man bei der Bestimmung der Bahnen der Doppelsterne von der Voraussetzung aus, dass der Sternsatellit um seinen Hauptstern eine Ellipse beschreibt, in deren einem Brennpunkte der Hauptstern steht, und dass die Bewegung auch sonst ganz nach denselben Gesetzen erfolgt, nach denen sich die Planeten um die Sonne bewegen. Da die Projection einer Ellipse auf einer beliebigen Ebene jederzeit wieder eine Ellipse ist; so werden auch die scheinbaren Bahnen der Doppelsterne Ellipsen seyn, aber die Projection des Hauptsterns, um welche die scheinbare Bewegung erfolgt, wird nun nicht mehr der Brennpunkt der Ellipse seyn. Dagegen wird, so wie die wahre Bewegung, auch die Bewegung in der scheinbaren Bahn, dem zweiten *Kepler'schen* Gesetze, nach welchem die von dem Radius Vector beschriebenen Sektoren den Zeiten proportional sind, in den sie beschrieben werden, unterworfen seyn, wie augenblicklich erhellet, wenn man nur überlegt, dass der Flächeninhalt der Projection einer jeden ebenen Figur auf einer beliebigen Ebene erhalten wird, wenn man den Flächeninhalt der gegebenen Figur mit dem Cosinus des Neigungswinkels ihrer Ebene gegen die Projectionsebene multiplicirt.

Den ersten Versuch einer Bahnbestimmung der Doppelsterne hat *Savary* gemacht, worüber man die *Connaissance des temps pour l'an 1830. p. 56. und p. 163.* nachzusehen hat. Hierauf hat *Encke* eine schöne, vorzüglich durch die grosse Eleganz der in ihr entwickelten Formeln ausgezeichnete Abhandlung über diesen Gegenstand im *Berliner astronomischen Jahrbuche für 1832. S. 253.* geliefert. Beide Astronomen legen ihren Rechnungen vier vollständige Beobachtungen, nämlich vier Positionswinkel und die vier entsprechenden Distanzen, so wie die entsprechenden, ebenfalls beobachteten Zeiten zum Grunde, und benutzen bei der Bestimmung der scheinbaren Bahn, die wir für jetzt allein in's Auge fassen wollen, vorzüglich das zweite *Kepler'sche* Gesetz, dass nämlich auch in der scheinbaren Bahn die von dem Radius Vector der Projection des Sternsatelliten beschriebenen Sektoren den Zeiten proportional sind, in denen sie beschrieben werden, wobei übrigens zu bemerken ist, dass von den vier gegebenen Positionswinkeln und den vier gegebenen Distanzen eigentlich ein Datum überflüssig ist, und nur zur Erleichterung der Auflösung gebraucht wird. Bei dieser Methode werden auch die Zeiten, zu denen die Positionswinkel und Distanzen gemessen worden sind, in die Rechnung aufgenommen, welches ganz recht und auch am natürlichsten ist, weil die Zeiten vielleicht die einzigen ganz sichern Data der Beobachtungen sind, indem die Positionswinkel und Distanzen selten und vielleicht nie mit der hier so wünschenswerthen Schärfe erhalten werden können. Indess ist es wenigstens in *geometrischer* Rücksicht interessant, die Aufgabe noch aus einem andern Gesichtspunkte aufzufassen. Man kann nämlich, da ein Kegelschnitt, wie wir im ersten Theile dieser Abhandlung gesehen haben, durch fünf gegebene Punkte bestimmt wird, die scheinbare Bahn auch aus fünf vollständigen Beobachtungen, nämlich aus fünf Positionswinkeln und den fünf entsprechenden Distanzen bestimmen, wobei man dann weder die Zeiten der Beobachtungen als bekannt voraussetzen, noch das zweite *Kepler'sche* Gesetz zum Grunde zu legen braucht. Die Auflösung dieser Aufgabe, welche in gewisser Rücksicht der von *Gauss* in der *Theoria motus corporum coelestium. §. 82.* mit so vieler Eleganz aufgelösten Aufgabe: aus drei Vektoren und den drei Winkeln, welche dieselben mit einer beliebigen von der Sonne aus in der Ebene einer Planetenbahn gezogenen Linie einschliessen, die Planetenbahn zu bestimmen, analog ist, bildet den

Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung, und ist in dem ersten Theile schon vollständig entwickelt worden, indem man für die Grössen

$$r, r_1, r_2, r_3, r_4 \text{ und } \omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

bloss die fünf gemessenen Distanzen und Positionswinkel zu setzen braucht. Jetzt wollen wir nun noch zeigen, wie aus der berechneten scheinbaren Bahn eines Doppelsterns seine wahre Bahn hergeleitet werden kann.

Bevor ich jedoch zu diesem Gegenstande selbst übergehe, bemerke ich, dass auch *John Herschel* im fünften Bande der *Memoirs of the royal astronomical Society*. p.171. eine schöne, jedoch grösstentheils graphische Methode zur Bestimmung der Bahnen der Doppelsterne bekannt gemacht hat, die namentlich in England mit sehr grossem Beifalle, den sie nach meiner Überzeugung auch völlig verdient, aufgenommen worden ist, über die ich mich aber hier, ohne mich zu weit von meinem eigentlichen Zwecke zu entfernen, nicht weiter verbreiten kann.

2.

S sey der scheinbare Ort des ruhenden Sterns, *C* sey der Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse; so ist *S* die Projection des Brennpunkts, in welchem sich der ruhende Stern befindet, *C* die Projection des Mittelpunkts der wahren Ellipse.

Zuerst wollen wir nun die Coordinaten von *S* in Bezug auf das System der beiden Axen der scheinbaren Ellipse bestimmen, indem wir diese Coordinaten durch α, β bezeichnen. *X, Y* sind die Coordinaten des Punktes *A* in Bezug auf das System der beiden Axen der scheinbaren Ellipse. Die Coordinaten des Punktes *A* in Bezug auf das primitive System, dessen Anfangspunkt *S* ist, sind $r \cos \omega, r \sin \omega$. Der Winkel, unter welchem der positive Theil der Hauptaxe der scheinbaren Ellipse gegen den positiven Theil der Abscissenaxe eines durch den Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse parallel mit dem primitiven Systeme gelegten Systems geneigt ist, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Abscissenaxe des in Rede stehenden, dem primitiven parallelen Systems an durch den von den positiven Theilen der Axen dieses Systems eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach derselben Richtung hin von 0 bis 360° zählt, ist im Vorhergehenden durch θ bezeichnet worden. Alle diese Grössen sind bekannt, weil überhaupt die scheinbare Ellipse als bekannt angenommen wird. Betrachtet man nun das System der beiden Axen der scheinbaren Ellipse als das primitive System; so hat man nach den aus der analytischen Geometrie bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung in der Ebene die folgenden Gleichungen:

$$X = \alpha + r \cos \omega \cos(360^\circ - \theta) - r \sin \omega \sin(360^\circ - \theta),$$

$$Y = \beta + r \cos \omega \sin(360^\circ - \theta) + r \sin \omega \cos(360^\circ - \theta);$$

d. i.

$$X = \alpha + r \cos \omega \cos \theta + r \sin \omega \sin \theta,$$

$$Y = \beta - r \cos \omega \sin \theta + r \sin \omega \cos \theta;$$

oder

$$X = \alpha + r \cos(\theta - \omega),$$

$$Y = \beta - r \sin(\theta - \omega);$$

also

$$1. \begin{cases} \alpha = X - r \cos(\theta - \omega), \\ \beta = Y + r \sin(\theta - \omega); \end{cases}$$

wodurch die beiden gesuchten Coordinaten α, β gefunden sind.

3.

Die Gleichung des durch den Punkt S gehenden Durchmessers der scheinbaren Ellipse in Bezug auf das System der beiden Axen der scheinbaren Ellipse ist

$$y = \frac{\beta}{a} x .$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Endpunkte dieses Durchmessers durch x_1, y_1 ; so haben wir, weil bekanntlich a, b die Halbaxen der scheinbaren Ellipse sind, die beiden folgenden Gleichungen:

$$y_1 = \frac{\beta}{a} x_1 , \quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1 .$$

Lösen wir diese Gleichungen auf; so erhalten wir

$$2. \quad x_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2}} , \quad y_1 = \pm \frac{\beta}{\sqrt{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2}} ;$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.

Die Gleichung der durch den Punkt x_1, y_1 gehenden Tangente der scheinbaren Ellipse ist nach der Theorie der Ellipse

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2 .$$

Weil nun diese Tangente, wovon man sich durch eine einfache geometrische Betrachtung sogleich überzeugen wird, der Projection der zweiten Axe der wahren Ellipse, die offenbar ein Durchmesser der scheinbaren Ellipse ist, parallel ist; so ist nach Principien der analytischen Geometrie die Gleichung dieser Projection

$$y = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x .$$

Bezeichnen wir also die Coordinaten der Endpunkte des Durchmessers der scheinbaren Ellipse, welcher die Projection der zweiten Axe der wahren Ellipse ist, durch x_2, y_2 ; so haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$y_2 = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x_2 , \quad \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = 1 .$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich:

$$x_2^2 = \frac{a^4 y_1^2}{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2} , \quad y_2^2 = \frac{b^4 x_1^2}{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2} ;$$

und folglich, wenn in diese Gleichungen die aus dem Vorhergehenden bekannten Ausdrücke von x_1 und y_1 eingeführt werden:

$$x_2^2 = \frac{a^4 \beta^2}{a^2 \beta^2 + b^2 a^2} , \quad y_2^2 = \frac{b^4 a^2}{a^2 \beta^2 + b^2 a^2} ;$$

oder

$$x_2^2 = \frac{a^2 \beta^2}{b^2 \left\{ \left(\frac{a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{b} \right)^2 \right\}}, \quad y_2^2 = \frac{b^2 a^2}{a^2 \left\{ \left(\frac{a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{b} \right)^2 \right\}}.$$

Wollte man nun mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$x_1 = \pm \frac{a\beta}{b \sqrt{\left(\frac{a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{b} \right)^2}}, \quad y_1 = \pm \frac{ba}{a \sqrt{\left(\frac{a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{b} \right)^2}}$$

setzen; so würde

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{b^2 a}{a^2 \beta} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

seyn, da doch nach dem Obigen

$$\frac{y_2}{x_2} = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

ist. Also muss man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$3. \quad x_2 = \pm \frac{a\beta}{b \sqrt{\left(\frac{a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{b} \right)^2}}, \quad y_2 = \mp \frac{ba}{a \sqrt{\left(\frac{a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{b} \right)^2}}$$

setzen.

Die beiden Halbaxen der wahren Ellipse und ihre Projectionen seyen respective a_1, b_1 und a_2, b_2 ; so ist

$$a_2^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad b_2^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Folglich ist nach 2. und 3.

$$4. \quad a_2^2 = \frac{a^2 + \beta^2}{\left(\frac{a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{b} \right)^2}, \quad b_2^2 = \frac{b^2 \left(\frac{a}{a} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\beta}{b} \right)^2}{\left(\frac{a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{b} \right)^2};$$

also, wenn wir der Kürze wegen

$$5. \quad \left(\frac{a_2}{b_2} \right)^2 = \mu_2$$

setzen,

$$6. \quad \mu_2 = \frac{a^2 + \beta^2}{b^2 \left(\frac{a}{a} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\beta}{b} \right)^2}.$$

Bezeichnet ferner e_1 die Excentricität der wahren Ellipse; so ist, wie sogleich erhellet, wenn man nur überlegt, dass S die Projection des Brennpunkts der wahren Ellipse ist,

und folglich $a_1^2 : a_2^2 = e_1^2 : a^2 + \beta^2 = a_1^2 - b_1^2 : a^2 + \beta^2$,

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 : a_2^2 = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 - 1 : a^2 + \beta^2,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$7. \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 = \mu_1$$

setzen,

also

$$\mu_1 : a_2^2 = \mu_1 - 1 : a^2 + \beta^2;$$

oder

$$8. \mu_1 = \frac{a_2^2}{a_2^2 - a^2 - \beta^2},$$

$$9. \mu_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{a_2}\right)^2}.$$

Auch ist, wenn der Kürze wegen

$$10. \lambda = \sqrt{a^2 + \beta^2}$$

gesetzt wird,

$$11. \mu_1 = \frac{a_2^2}{(a_2 - \lambda)(a_2 + \lambda)}.$$

Wir wollen nun die beiden Hülfswinkel θ_1, θ_2 mittelst der Formeln

$$12. \tan \theta_1 = \frac{\beta}{a}, \quad \tan \theta_2 = -\frac{ab^2}{\beta a^2};$$

oder mittelst der Formeln

$$13. \tan \theta_1 = \frac{\beta}{a}, \quad \tan \theta_2 = -\frac{b^2}{a^2} \cot \theta_1$$

berechnen, und dabei voraussetzen, dass diese Hülfswinkel positiv und negativ, ihre absoluten Werthe aber nie grösser als 90° genommen werden; so ist

$$14. \lambda = \sqrt{a^2 + \beta^2} = a \sec \theta_1 = \frac{a}{\cos \theta_1},$$

wenn man bloss auf den absoluten Werth der Grösse $a \sec \theta_1$ Rücksicht nimmt. Ferner ist

$$\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{a}\right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{a\beta}{ba}\right)^2 \right\} = \left(\frac{a}{a}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \right\},$$

und folglich, wie man mittelst einiger bekannten goniometrischen Formeln leicht findet,

$$15. \left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 = -\left(\frac{a}{a}\right)^2 \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}.$$

End-

Endlich ist

$$b^2 \left(\frac{a}{a}\right)^2 + a^2 \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 = b^2 \left(\frac{a}{a}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{a^2 \beta}{b^2 a}\right)^2\right\} = b^2 \left(\frac{a}{a}\right)^2 (1 + \cot^2 \theta_2),$$

d. i.

$$16. \quad b^2 \left(\frac{a}{a}\right)^2 + a^2 \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 = b^2 \left(\frac{a}{a}\right)^2 \operatorname{cosec}^2 \theta_2.$$

Hieraus erhält man leicht

$$17. \quad x_1^2 = -\frac{a^2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}, \quad x_2^2 = -\frac{b^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2^2}{\sin \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)};$$

und folglich

$$18. \quad x_1^2 x_2^2 = a^2 b^2 \frac{\cos \theta_1^2 \cos \theta_2^2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)^2}.$$

Ferner ist

$$19. \quad a_2^2 = -a^2 \cdot \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}, \quad b_2^2 = -b^2 \cdot \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)};$$

oder

$$19.* \quad a_2 = a \sqrt{\frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)}}, \quad b_2 = b \sqrt{\frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}};$$

und folglich

$$20. \quad a_2^2 b_2^2 = \frac{a^2 b^2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)^2},$$

oder

$$20*. \quad a_2 b_2 = \frac{ab}{\sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

wenn man bloss den absoluten Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens berücksichtigt.

Endlich erhält man ohne Schwierigkeit

$$21. \quad \mu_2 = \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta_2^2}{b^2 \cos^2 \theta_1^2}.$$

Weil nun aber

$$\operatorname{tang} \theta_1 \operatorname{tang} \theta_2 = -\frac{b^2}{a^2}$$

ist; so ist

$$\mu_2 = -\frac{\sin^2 \theta_2^2 \cot \theta_2}{\cos^2 \theta_1^2 \operatorname{tang} \theta_1},$$

d. i.

$$22. \quad \mu_2 = -\frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1}.$$

4.

Wir wollen nun, was offenbar verstattet ist, die Mittelpunkte der wahren und scheinbaren Ellipse mit einander zusammenfallen lassen, und wollen den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Ellipsen als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raume, die beiden Axen der scheinbaren Ellipse aber immer als Axen der x und y annehmen. Bezeichnen wir, dies vorausgesetzt, die Coordinaten der Endpunkte der Axen $2a_1$ und $2b_1$ der wahren Ellipse überhaupt respective durch x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 ; so ist

$$23. \quad a_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad b_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

und

$$24. \quad \mu_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \quad \mu_2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Die Gleichungen der Axen $2a_1$ und $2b_1$ der wahren Ellipse sind respective

$$25. \quad y = \frac{y_1}{x_1} x, \quad z = \frac{z_1}{x_1} x \quad \text{und} \quad y = \frac{y_2}{x_2} x, \quad z = \frac{z_2}{x_2} x.$$

Weil nun diese beiden Axen auf einander senkrecht stehen; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$1 + \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} + \frac{z_1 z_2}{x_1 x_2} = 0,$$

d. i.

$$26. \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Die Gleichung der Ebene der wahren Ellipse sey

$$x + Ay + Bz = 0;$$

so hat man zur Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen

$$x_1 + Ay_1 + Bz_1 = 0, \quad x_2 + Ay_2 + Bz_2 = 0.$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen A und B und führt die erhaltenen Ausdrücke in die obige Gleichung der Ebene der wahren Ellipse ein; so erhält man für diese Ebene die Gleichung

$$27. \quad (y_1 z_2 - y_2 z_1) x + (z_1 x_2 - z_2 x_1) y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z = 0.$$

Also ist

$$28. \quad (y_1 z_2 - y_2 z_1) x + (z_1 x_2 - z_2 x_1) y = 0$$

die Gleichung der Durchschnittslinie der Ebene der wahren Ellipse mit der Ebene der xy , d. i. mit der Ebene der scheinbaren Ellipse. Bezeichnen wir nun den von dieser Linie mit der Axe der x , d. i. mit der Hauptaxe der scheinbaren Ellipse eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel auf die in der analytischen Geometrie gewöhnliche Weise nehmen, so dass derselbe nämlich der 180° nicht übersteigende Winkel ist, welchen der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Theil der in Rede stehenden Durchschnittslinie mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, durch ϕ ; so ist

$$29. \quad \tan \phi = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 z_2 - x_2 z_1}.$$

Weil nun nach 2. und 3.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\beta}{a}, \quad \frac{y_2}{x_2} = -\frac{ab^2}{\beta a^2}$$

ist; so ist nach 12.

$$\text{tang } \theta_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad \text{tang } \theta_2 = \frac{y_2}{x_2},$$

und folglich

$$y_1 = x_1 \text{ tang } \theta_1, \quad y_2 = x_2 \text{ tang } \theta_2.$$

Also ist nach 24.

$$30. \quad \mu_1 = \frac{x_1^2 \sec^2 \theta_1 + z_1^2}{x_2^2 \sec^2 \theta_2 + z_2^2}, \quad \mu_2 = \frac{x_1^2 \sec^2 \theta_1}{x_2^2 \sec^2 \theta_2}$$

Ferner ist nach 26.

$$z_1 z_2 = -x_1 x_2 (1 + \text{tang } \theta_1 \text{ tang } \theta_2),$$

d. i.

$$31. \quad \frac{z_1 z_2}{x_1 x_2} = -\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}.$$

Nach 29. ist

$$\text{tang } \phi = \frac{y_1 z_1 z_2 - y_2 z_1^2}{x_1 z_1 z_2 - x_2 z_1^2} = \frac{y_1 z_2^2 - y_2 z_1 z_2}{x_1 z_2^2 - x_2 z_1 z_2}.$$

Führt man die obigen Ausdrücke von y_1, y_2 und den aus 31. sich ergebenden Ausdruck von $z_1 z_2$ ein; so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen

$$32. \quad \begin{cases} \frac{z_1^2 \cos^2 \theta_1}{x_1^2} = -\cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_1)}{\sin(\phi - \theta_2)}, \\ \frac{z_2^2 \cos^2 \theta_2}{x_2^2} = -\cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_2)}{\sin(\phi - \theta_1)}. \end{cases}$$

Weil nun nach 30.

$$\mu_1 = \frac{x_1^2 \sec^2 \theta_1}{x_2^2 \sec^2 \theta_2} \cdot \frac{1 + \frac{z_1^2 \cos^2 \theta_1}{x_1^2}}{1 + \frac{z_2^2 \cos^2 \theta_2}{x_2^2}} = \mu_2 \cdot \frac{1 + \frac{z_1^2 \cos^2 \theta_1}{x_1^2}}{1 + \frac{z_2^2 \cos^2 \theta_2}{x_2^2}}$$

ist; so ist nach 32.

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_1)}{\sin(\phi - \theta_2)}}{1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_2)}{\sin(\phi - \theta_1)}},$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{\mu_2} &= \frac{\sin(\phi - \theta_1)}{\sin(\phi - \theta_2)} \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\phi - \theta_1)}{\sin(\phi - \theta_1) - \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\phi - \theta_2)} \\ &= \frac{\sin(\phi - \theta_1)}{\sin(\phi - \theta_2)} \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_2) - \sin(\phi + \theta_2 - 2\theta_1)}{\sin(\phi - \theta_1) - \sin(\phi + \theta_1 - 2\theta_2)} \\ &= \frac{\sin(\phi - \theta_1)}{\sin(\phi - \theta_2)} \cdot \frac{\cos(\phi - \theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\phi - \theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\sin(\phi - \theta_1) \cos(\phi - \theta_1)}{\sin(\phi - \theta_2) \cos(\phi - \theta_2)}, \end{aligned}$$

d. i.

$$33. \frac{\mu_1}{\mu_2} = - \frac{\sin 2(\phi - \theta_1)}{\sin 2(\phi - \theta_2)}.$$

Also ist

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = - \frac{\sin 2\theta_1 - \cos 2\theta_1 \tan 2\phi}{\sin 2\theta_2 - \cos 2\theta_2 \tan 2\phi},$$

und folglich

$$34. \tan 2\phi = \frac{\mu_1 \sin 2\theta_2 + \mu_2 \sin 2\theta_1}{\mu_1 \cos 2\theta_2 + \mu_2 \cos 2\theta_1}.$$

Wenn nun überhaupt

$$\tan \psi = \frac{n \sin \eta + n' \sin \eta'}{n \cos \eta + n' \cos \eta'}$$

ist; so ist, wovon man sich durch leichte Rechnung überzeugen wird, für jedes δ

$$\tan(\psi + \delta) = \frac{n \sin(\eta + \delta) + n' \sin(\eta' + \delta)}{n \cos(\eta + \delta) + n' \cos(\eta' + \delta)}.$$

Vermindert man also alle Winkel in der Gleichung 34. um $2\theta_2$; so erhält man

$$35. \tan 2(\phi - \theta_2) = \frac{\mu_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2)}{\mu_1 + \mu_2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Vermindert man dagegen alle Winkel in der Gleichung 34. um $2\theta_1$; so erhält man

$$36. \tan 2(\phi - \theta_1) = \frac{\mu_1 \sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{\mu_2 + \mu_1 \cos 2(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Ist nun $\frac{\mu_2}{\mu_1} < 1$, so berechne man den Hülfswinkel ξ mittelst der Formel

$$37. \cos \xi = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cos 2(\theta_1 - \theta_2).$$

Dann ist, wie man leicht mittelst der Formel 35. findet,

$$38. \tan 2(\phi - \theta_2) = \frac{\mu_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2)}{2\mu_1 \cos \frac{1}{2}\xi^2}.$$

Ist aber $\frac{\mu_2}{\mu_1} > 1$; so berechne man den Hülfswinkel ξ_1 mittelst der Formel

$$39. \cos \xi_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cos 2(\theta_2 - \theta_1).$$

Dann ist nach 36.

$$40. \tan 2(\phi - \theta_1) = \frac{\mu_1 \sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{2\mu_2 \cos \frac{1}{2}\xi_1^2}.$$

Mit Hülfe von 23., 32. und der Ausdrücke

$$y_1 = x_1 \tan \theta_1, \quad y_2 = x_2 \tan \theta_2$$

erhält man

$$a_1^2 = x_1^2 \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\phi - \theta_1)}{\cos \theta_1^2 \sin(\phi - \theta_2)},$$

$$b_1^2 = x_2^2 \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_1) - \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\phi - \theta_2)}{\cos \theta_2^2 \sin(\phi - \theta_1)};$$

also

$$a_1^2 = x_1^2 \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_2) - \sin(\phi + \theta_2 - 2\theta_1)}{2 \cos \theta_1^2 \sin(\phi - \theta_2)} = x_1^2 \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\phi - \theta_1)}{\cos \theta_1^2 \sin(\phi - \theta_2)},$$

$$b_1^2 = x_2^2 \cdot \frac{\sin(\phi - \theta_1) - \sin(\phi + \theta_1 - 2\theta_2)}{2 \cos \theta_2^2 \sin(\phi - \theta_1)} = x_2^2 \cdot \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1) \cos(\phi - \theta_2)}{\cos \theta_2^2 \sin(\phi - \theta_1)};$$

folglich, wenn man nur auf die absoluten Werthe der Grössen rechts von den Gleichheitszeichen Rücksicht nimmt,

$$41. \begin{cases} a_1 = \frac{x_1}{\cos \theta_1} \sqrt{\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\phi - \theta_1)}{\sin(\phi - \theta_2)}}, \\ b_1 = \frac{x_2}{\cos \theta_2} \sqrt{\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1) \cos(\phi - \theta_2)}{\sin(\phi - \theta_1)}}. \end{cases}$$

Führt man aber die Werthe von x_1 und x_2 aus 17. ein; so erhält man

$$42. \begin{cases} a_1 = a \sqrt{-\frac{\sin \theta_2 \cos(\phi - \theta_1)}{\cos \theta_1 \sin(\phi - \theta_2)}}, \\ b_1 = b \sqrt{\frac{\cos \theta_1 \cos(\phi - \theta_2)}{\sin \theta_2 \sin(\phi - \theta_1)}}. \end{cases}$$

Auch ist

$$43. b_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\mu_1}}.$$

Bemerkenswerth ist auch die Formel

$$44. a_1 b_1 = ab \sqrt{-\cot(\phi - \theta_1) \cot(\phi - \theta_2)}.$$

Bezeichnet man den Neigungswinkel der Ebene der wahren Ellipse gegen die Ebene der scheinbaren Ellipse, d. i. gegen die Projectionsebene durch i ; so ist nach der Lehre von der Ellipse und der Theorie der Projectionen

$$45. \cos i = \frac{ab}{a_1 b_1}.$$

Also ist nach 44.

$$46. \cos i = \sqrt{-\tan(\phi - \theta_1) \tan(\phi - \theta_2)}.$$

Rücksichtlich der Berechnung des Winkels ϕ ist nun aber noch die folgende wichtige Bemerkung zu machen. Man weiss über diesen Winkel nur so viel, dass er positiv und nicht grösser als 180° ist. Daher ist 2ϕ positiv und nicht grösser als 360° . Berechnet man nun 2ϕ mittelst der Formel 34. oder eines der beiden aus derselben hergeleiteten Ausdrücke 35. und 36.; so erhält man für 2ϕ jederzeit zwei Werthe, die wir durch 2ϕ und $2\phi + 180^\circ$ bezeichnen wollen, so dass also die beiden entsprechenden

Werthe des Winkels ϕ selbst ϕ und $\phi + 90^\circ$ seyn werden. Die diesen beiden Werthen von ϕ entsprechenden Werthe von $\cos i$ sind nach 46.

$$\sqrt{1 - \tan(\phi - \theta_1) \tan(\phi - \theta_2)}$$

und

$$\sqrt{1 - \cot(\phi - \theta_1) \cot(\phi - \theta_2)}.$$

Da nun offenbar bloss immer die eine dieser beiden Grössen kleiner als die Einheit ist; so muss man für ϕ jederzeit den der beiden in Rede stehenden Werthe setzen, welcher, wie es seyn muss, $\cos i$ kleiner als die Einheit liefert.

Den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der Theil der Hauptaxe der wahren Ellipse, in welchem der Hauptstern, dessen Projection der durch die Coordinaten α, β bestimmte Punkt S ist, liegt, mit dem auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theile der Durchschnittslinie der Ebenen der wahren und der scheinbaren Ellipse einschliesst, wollen wir durch Ω bezeichnen, und nun auch diesen Winkel zu bestimmen suchen.

Wenn die Coordinaten α, β beide positiv sind und $\theta_1 < \phi$ ist; so ist nach den Principien der sphärischen Trigonometrie, wovon man sich durch eine einfache Betrachtung überzeugen wird,

$$\cos i = \frac{\tan(\phi - \theta_1)}{\tan \Omega}.$$

Wenn die Coordinaten α, β beide positiv sind und $\theta_1 > \phi$ ist; so ist

$$\cos i = \frac{\tan(\theta_1 - \phi)}{\tan \Omega} = - \frac{\tan(\phi - \theta_1)}{\tan \Omega}.$$

Wenn die erste der Coordinaten α, β negativ, die zweite positiv und $-\theta_1 < 180^\circ - \phi$ oder $\theta_1 > \phi - 180^\circ$ ist; so ist

$$\cos i = \frac{\tan\{180^\circ - (\phi - \theta_1)\}}{\tan \Omega} = - \frac{\tan(\phi - \theta_1)}{\tan \Omega}.$$

Wenn die erste der Coordinaten α, β negativ, die zweite positiv und $-\theta_1 > 180^\circ - \phi$ oder $\theta_1 < \phi - 180^\circ$ ist; so ist

$$\cos i = \frac{\tan\{(\phi - \theta_1) - 180^\circ\}}{\tan \Omega} = \frac{\tan(\phi - \theta_1)}{\tan \Omega}.$$

Wenn die Coordinaten α, β beide negativ sind und $\theta_1 < \phi$ ist; so ist

$$\cos i = \frac{\tan(\phi - \theta_1)}{\tan(180^\circ - \Omega)} = - \frac{\tan(\phi - \theta_1)}{\tan \Omega}.$$

Wenn die Coordinaten α, β beide negativ sind und $\theta_1 > \phi$ ist; so ist

$$\cos i = \frac{\tan(\theta_1 - \phi)}{\tan(180^\circ - \Omega)} = \frac{\tan(\phi - \theta_1)}{\tan \Omega}.$$

Wenn die erste der Coordinaten α, β positiv, die zweite negativ und $-\theta_1 < 180^\circ - \phi$ oder $\theta_1 > \phi - 180^\circ$ ist; so ist

$$\cos i = \frac{\text{tang} \{180^\circ - (\phi - \theta_1)\}}{\text{tang} (180^\circ - \Omega)} = \frac{\text{tang} (\phi - \theta_1)}{\text{tang} \Omega}.$$

Wenn die erste der Coordinaten α, β positiv, die zweite negativ und $-\theta_1 > 180^\circ - \phi$ oder $\theta_1 < \phi - 180^\circ$ ist; so ist

$$\cos i = \frac{\text{tang} \{(\phi - \theta_1) - 180^\circ\}}{\text{tang} (180^\circ - \Omega)} = - \frac{\text{tang} (\phi - \theta_1)}{\text{tang} \Omega}$$

Also ist

$$47. \text{ tang} \Omega = \pm \frac{\text{tang} (\phi - \theta_1)}{\cos i},$$

und in dieser Formel das obere Zeichen zu nehmen:

- wenn α positiv, β positiv, $\theta_1 < \phi$;
- wenn α negativ, β positiv, $\theta_1 < \phi - 180^\circ$;
- wenn α negativ, β negativ, $\theta_1 > \phi$;
- wenn α positiv, β negativ, $\theta_1 > \phi - 180^\circ$

ist. Dagegen ist in der in Rede stehenden Formel das untere Zeichen zu nehmen:

- wenn α positiv, β positiv, $\theta_1 > \phi$;
- wenn α negativ, β positiv, $\theta_1 > \phi - 180^\circ$;
- wenn α negativ, β negativ, $\theta_1 < \phi$;
- wenn α positiv, β negativ, $\theta_1 < \phi - 180^\circ$

ist. Befolgt man diese Regeln, so lässt sich der Winkel Ω immer ohne alle Zweideutigkeit bestimmen.

Die gerade Linie, in welcher die Ebene der wahren Ellipse die Ebene der scheinbaren Ellipse schneidet, heisst die *Knotenlinie*. Bezeichnet man den Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Theil der Knotenlinie mit der von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der beiden Ellipsen aus der geraden Linie, von welcher die Positionswinkel an gerechnet werden, parallel und nach derselben Gegend hin, wie letztere Linie von dem Punkte S aus, gezogenen Linie einschliesst, indem man diesen Winkel ganz auf dieselbe Weise wie die Positionswinkel nimmt, durch K ; so ist, wovon man sich durch eine einfache Betrachtung überzeugen wird, in völliger Allgemeinheit

$$K = \theta + \phi,$$

wenn man nur die Summe $\theta + \phi$, wenn dieselbe 360° übersteigt, jederzeit um 360° vermindert. Auf diese Weise ist also mittelst des Vorhergehenden die Lage der Knotenlinie vollkommen bestimmt.

5.

Den Endpunkt der Haupttaxe der wahren Ellipse, welcher dem ruhenden Sterne am nächsten ist, nennt man auf ähnliche Art wie in der Theorie der Planeten das *Perihelium*, und gebraucht hier überhaupt dieselben Benennungen wie in jener Theorie. Die Aufgabe, welche wir nun zunächst auflösen wollen, ist die Bestimmung der einem

gewissen Positionswinkel des Sternsatelliten entsprechenden wahren Anomalie desselben. Den Positionswinkel wollen wir durch ω , die entsprechende wahre Anomalie durch ν bezeichnen, und wollen letztere in der wahren Bahn vom Perihel an in demselben Sinne von 0 bis 360° zählen, wie die Positionswinkel in der scheinbaren Bahn von der von S ausgehenden Linie an, von welcher an die Positionswinkel genommen werden.

Zu dem Ende denken wir uns von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der beiden Ellipsen aus zwei Linien gezogen, welche dem Radius Vector des Sternsatelliten und der Projection dieses Radius Vectors parallel und nach derselben Gegend hin gerichtet sind, wie diese Linien selbst von dem Punkte S aus. Sehr leicht wird nun erhellen, dass der von dem auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theile der Knotenlinie und der von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der beiden Ellipsen aus mit der Projection des Radius Vectors des Sternsatelliten parallel gezogenen Linie eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von der erstern Linie an in demselben Sinne nimmt wie die Positionswinkel, entweder $\omega - K$ oder $360^\circ + (\omega - K)$ ist. Eben so ist der von dem auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theile der Knotenlinie mit der von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der beiden Ellipsen aus dem Radius Vector des Sternsatelliten parallel gezogenen Linie eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von der erstern Linie an in demselben Sinne nimmt wie die wahren Anomalien, entweder $\nu - \Omega$ oder $360^\circ + (\nu - \Omega)$. Daher ist, wie man aus den bekannten Principien der sphärischen Trigonometrie leicht herleitet, in völliger Allgemeinheit

$$\cos i = \frac{\text{tang}(\omega - K)}{\text{tang}(\nu - \Omega)} ;$$

also

$$48. \quad \text{tang}(\nu - \Omega) = \frac{\text{tang}(\omega - K)}{\cos i} .$$

Bezeichnet man nun den seinem absoluten Werthe nach kleinsten Winkel, dessen Tangente die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist, durch V ; so ist, wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\nu - \Omega = V + n\pi ,$$

und folglich

$$\nu = V + \Omega + n\pi .$$

Also ist

$$0 < V + \Omega + n\pi < 2\pi ;$$

woraus sich

$$-\frac{V+\Omega}{\pi} < n < -\frac{V+\Omega}{\pi} + 2$$

ergiebt. Hieraus sieht man, dass n zwei um eine Einheit von einander verschiedene Werthe haben kann. Um den Werth zu kennen, welchen man zu nehmen hat, muss man wissen, ob ν kleiner oder grösser als 180° ist, welches sich auf folgende Art beurtheilen lässt. Wir wollen annehmen, dass die Grössen α, β beide positiv sind. Wenn nun die Grössen X, Y beide positiv sind; so berechne man den 90° nicht übersteigenden Winkel ψ mittelst der Formel

$$\text{tang} \psi = \frac{Y}{X} .$$

Ist

Ist dann $\psi > \theta_1$, so ist $v < 180^\circ$; ist $\psi < \theta_1$, so ist $v > 180^\circ$. Wenn X negativ, Y positiv ist; so ist $v < 180^\circ$. Wenn X negativ, Y negativ ist; so ist $v < 180^\circ$ oder $v > 180^\circ$, jenachdem $\psi < \theta_1$ oder $\psi > \theta_1$ ist. Wenn X positiv, Y negativ ist; so ist $v > 180^\circ$. Ganz ähnliche Regeln lassen sich für die übrigen Fälle, wenn α, β nicht beide positiv sind, entwickeln, wobei wir aber hier nicht länger verweilen wollen.

Nun ist man auch im Stande, die sogenannte mittlere jährliche Bewegung m des Sternsatelliten, seine ganze Umlaufszeit T , und die *Epoche* E , d. h. die Zeit des Durchgangs durch das Perihel zu bestimmen. Zu dem Ende berechne man nach dem Vorhergehenden die, zwei beliebigen Positionswinkeln ω, ω_1 entsprechenden wahren Anomalien v, v_1 des Sternsatelliten. Dann berechne man ferner die Grösse k_1 mittelst der Formel

$$49. \quad k_1 = \frac{e_1}{a_1} = \frac{\sqrt{(a_1 + b_1)(a_1 - b_1)}}{a_1}.$$

Dann suche man die den wahren Anomalien v, v_1 entsprechenden excentrischen Anomalien u, u_1 mittelst der aus der Theorie der Planeten bekannten Formeln

$$50. \quad \tan \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}} \cdot \tan \frac{1}{2} v, \quad \tan \frac{1}{2} u_1 = \sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}} \cdot \tan \frac{1}{2} v_1.$$

Dann hat man ferner nach der Theorie der Planeten, wenn t, t_1 die Zeiten bezeichnen, zu denen die Positionswinkel ω, ω_1 gemessen worden sind, die Gleichungen

$$m(t-E) = u - k_1 \sin u, \quad m(t_1-E) = u_1 - k_1 \sin u_1;$$

aus denen sich

$$51. \quad m = \frac{u - u_1 - k_1 (\sin u - \sin u_1)}{t - t_1},$$

oder

$$52. \quad m = \frac{u - u_1 - 2k_1 \sin \frac{1}{2}(u - u_1) \cos \frac{1}{2}(u + u_1)}{t - t_1}$$

ergibt, wo natürlich m in Theilen der Einheit oder des Radius ausgedrückt ist. Die in Graden ausgedrückte mittlere jährliche Bewegung ist

$$\frac{m}{3600 \cdot \sin 1''}.$$

Ferner ist

$$53. \quad E = t - \frac{u - k_1 \sin u}{m} = t_1 - \frac{u_1 - k_1 \sin u_1}{m},$$

und endlich

$$54. \quad T = \frac{2\pi}{m}.$$

Endlich wollen wir nun auch noch den Positionswinkel P des Perihels bestimmen. In dieser Beziehung wird aber sehr leicht das Folgende erhellen.

Wenn die Coordinaten α, β beide positiv sind; so ist

$$P = \theta + \theta_1 \quad \text{oder} \quad P = \theta + \theta_1 - 360^\circ,$$

jenachdem

$$\theta + \theta_1 < 360^\circ \text{ oder } \theta + \theta_1 > 360^\circ$$

ist.

Wenn die erste der Coordinaten α , β negativ, die zweite positiv ist; so ist

$$P = \theta + \theta_1 + 180^\circ \text{ oder } P = \theta + \theta_1 - 180^\circ,$$

jenachdem

$$\theta + \theta_1 < 180^\circ \text{ oder } \theta + \theta_1 > 180^\circ$$

ist.

Wenn die Coordinaten α , β beide negativ sind; so ist

$$P = \theta + \theta_1 + 180^\circ \text{ oder } P = \theta + \theta_1 - 180^\circ,$$

jenachdem

$$\theta + \theta_1 < 180^\circ \text{ oder } \theta + \theta_1 > 180^\circ$$

ist.

Wenn die erste der Coordinaten α , β positiv, die zweite negativ ist; so ist

$$P = \theta + \theta_1 + 360^\circ \text{ oder } P = \theta + \theta_1,$$

jenachdem

$$\theta + \theta_1 < 0 \text{ oder } \theta + \theta_1 > 0$$

ist.

Durch die Grössen

$$a_1, k_1, P, K, i, \Omega, m, T, E$$

ist nun offenbar die Bewegung des Sternsatelliten um seinen Hauptstern auf das vollständigste characterisirt.

6.

Gut wird es seyn, wenn wir den Gang, welchen man bei der Berechnung der wahren Bahn zu nehmen hat, ohne uns auf Detail einzulassen, hier nochmals ganz in der Kürze übersichtlich andeuten.

Zuerst berechnet man die Grössen α , β mittelst der Formeln

$$\alpha = X - r \cos(\theta - \omega), \quad \beta = Y + r \sin(\theta - \omega).$$

Nun berechnet man die beiden Hülfswinkel θ_1 , θ_2 mittelst der Formeln

$$\tan \theta_1 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \tan \theta_2 = - \frac{\alpha b^2}{\beta a^2} = - \frac{b^2}{a^2} \cot \theta_1,$$

und findet aus θ und θ_1 sogleich P . Hierauf sucht man λ und a_2 mittelst der Formeln

$$\lambda = \frac{\alpha}{\cos \theta_1}, \quad a_2 = a \sqrt{\frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)}},$$

und dann μ_1 und μ_2 mittelst der Formeln

$$\mu_1 = \frac{a_2^2}{(a_2 - \lambda)(a_2 + \lambda)}, \quad \mu_2 = - \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1}.$$

Nun erhält man ϕ mittelst der Formel

$$\operatorname{tang} 2\phi = \frac{\mu_1 \sin 2\theta_2 + \mu_2 \sin 2\theta_1}{\mu_1 \cos 2\theta_2 + \mu_2 \cos 2\theta_1},$$

oder einer der Formeln 35. und 36. Dann ergeben sich a_1, b_1, k_1 mittelst der Formeln

$$a_1 = a \sqrt{\frac{-\sin \theta_2 \cos(\phi - \theta_1)}{\cos \theta_1 \sin(\phi - \theta_2)}}, \quad b_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\mu_1}}, \quad k_1 = \frac{\sqrt{(a_1 + b_1)(a_1 - b_1)}}{a_1},$$

und i erhält man mittelst der Ausdrücke

$$\cos i = \frac{ab}{a_1 b_1} = \sqrt{-\operatorname{tang}(\phi - \theta_1) \operatorname{tang}(\phi - \theta_2)}.$$

Hierauf ergibt sich Ω mittelst der Formel

$$\operatorname{tang} \Omega = \pm \frac{\operatorname{tang}(\phi - \theta_1)}{\cos i},$$

und K mittelst der Formel

$$K = \theta + \phi.$$

Nun erhält man v und v_1 mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang}(v - \Omega) = \frac{\operatorname{tang}(\omega - K)}{\cos i},$$

$$\operatorname{tang}(v_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tang}(\omega_1 - K)}{\cos i};$$

und u und u_1 mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}v, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}u_1 = \sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}v_1.$$

Endlich erhält man m, E, T mittelst der Ausdrücke

$$m = \frac{u - u_1 - 2k_1 \sin \frac{1}{2}(u - u_1) \cos \frac{1}{2}(u + u_1)}{t - t_1}, \quad E = t - \frac{u - k_1 \sin u}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{m}.$$

Die Vergleichung der berechneten Bahn mit den Beobachtungen stellt man endlich auf folgende Art an. Durch Auflösung der transcendenten Gleichung

$$m(t - E) = u - k_1 \sin u \quad *)$$

*) M. s. z. B. die Abhandlung II. über das *Kepler'sche Problem*. Indess kann man bei der Auflösung der transcendenten Gleichung

$$\mu = \phi - \rho \sin \phi,$$

ρ kleiner als die Einheit vorausgesetzt, auch auf folgende einfache Weise verfahren. Es ist

$$\phi = \mu + \rho \sin \phi.$$

findet man die der Zeit t , welche als gegeben betrachtet wird, entsprechende excentrische Anomalie u , und die entsprechende wahre Anomalie v dann mittelst der Formel

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+k_1}{1-k_1}} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} u.$$

Man berechne nun die Grössen

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \dots$$

mittelst der folgenden Ausdrücke:

$$\mu_1 = \mu + \rho \sin \mu,$$

$$\mu_2 = \mu + \rho \sin \mu_1,$$

$$\mu_3 = \mu + \rho \sin \mu_2,$$

$$\mu_4 = \mu + \rho \sin \mu_3,$$

$$\mu_5 = \mu + \rho \sin \mu_4,$$

u. s. w.;

so lässt sich leicht zeigen, dass die Grössen

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \dots$$

sich der Grösse ϕ immer mehr und mehr nähern, und derselben auch beliebig nahe gebracht werden können, wenn man die Berechnung dieser Grössen nur weit genug fortsetzt.

Aus den vorhergehenden Gleichungen folgt nämlich

$$\mu_1 - \mu_2 = \rho(\sin \mu - \sin \mu_1) = 2\rho \sin \frac{1}{2}(\mu - \mu_1) \cos \frac{1}{2}(\mu + \mu_1),$$

$$\mu_2 - \mu_3 = \rho(\sin \mu_1 - \sin \mu_2) = 2\rho \sin \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) \cos \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2),$$

$$\mu_3 - \mu_4 = \rho(\sin \mu_2 - \sin \mu_3) = 2\rho \sin \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3) \cos \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3),$$

$$\mu_4 - \mu_5 = \rho(\sin \mu_3 - \sin \mu_4) = 2\rho \sin \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_4) \cos \frac{1}{2}(\mu_3 + \mu_4),$$

u. s. w.

Bezeichnen wir nun die absoluten Werthe von

$$\mu - \mu_1, \mu_1 - \mu_2, \mu_2 - \mu_3, \mu_3 - \mu_4, \mu_4 - \mu_5, \dots$$

respective durch

$$m, m_1, m_2, m_3, m_4, \dots,$$

die absoluten Werthe von

$$\sin \frac{1}{2}(\mu - \mu_1), \sin \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2), \sin \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3), \sin \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_4), \dots$$

respective durch

$$s, s_1, s_2, s_3, s_4, \dots;$$

so ist nach dem Obigen offenbar

$$m_1 < 2\rho s, m_2 < 2\rho s_1, m_3 < 2\rho s_2, m_4 < 2\rho s_3, \dots$$

Weil aber immer

$$s < \frac{1}{2}m, s_1 < \frac{1}{2}m_1, s_2 < \frac{1}{2}m_2, s_3 < \frac{1}{2}m_3, \dots$$

ist; so ist auch

$$m_1 < \rho m, m_2 < \rho m_1, m_3 < \rho m_2, m_4 < \rho m_3, \dots,$$

und folglich

$$m_1 < \rho m, m_2 < \rho^2 m, m_3 < \rho^3 m, m_4 < \rho^4 m, \dots$$

Da aber $\rho < 1$ ist; so nähern sich die Grössen

$$\rho m, \rho^2 m, \rho^3 m, \rho^4 m, \rho^5 m, \dots$$

Den der Zeit t entsprechenden Positionswinkel ω erhält man dann mittelst der Formel

$$\text{tang}(\omega - K) = \cos i \text{ tang}(\nu - \Omega) \quad (48.).$$

Die der Zeit t entsprechende Distanz r erhält man endlich mittelst der Formel

$$r = a(1 - k_1 \cos u) \cdot \frac{\cos(\nu - \Omega)}{\cos(\omega - K)},$$

deren Beweis für jeden der Theorie der Planetenbewegung und der Elemente der sphärischen Trigonometrie Kundigen nicht die mindeste Schwierigkeit hat. Eine andere sehr vorzügliche Methode, die Vergleichung, von der es sich hier handelt, anzustellen, sehe man in der oben angeführten trefflichen Abhandlung *Encke's*. Hier mögen die vorhergehenden Andeutungen genügen.

desto mehr der Null, je weiter man sie vom Anfange dieser Reihe entfernt nimmt, und können der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man sie nur weit genug vom Anfange dieser Reihe entfernt nimmt. Daher nähern sich auch die Grössen

$$\mu - \mu_1, \mu_1 - \mu_2, \mu_2 - \mu_3, \mu_3 - \mu_4, \mu_4 - \mu_5, \mu_5 - \mu_6, \dots$$

der Null desto mehr, je weiter man sie vom Anfange dieser Reihe entfernt nimmt, und können der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man sie nur weit genug vom Anfange dieser Reihe entfernt nimmt. Hieraus sieht man, dass in den Gleichungen

$$\mu_1 = \mu + \rho \sin \mu,$$

$$\mu_2 = \mu + \rho \sin \mu_1,$$

$$\mu_3 = \mu + \rho \sin \mu_2,$$

$$\mu_4 = \mu + \rho \sin \mu_3,$$

u. s. w.

die Grössen

$$\mu \text{ und } \mu_1, \mu_1 \text{ und } \mu_2, \mu_2 \text{ und } \mu_3, \mu_3 \text{ und } \mu_4, \text{ u. s. w.}$$

sich immer mehr und mehr der Gleichheit nähern, und auch mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit einander gleich gemacht werden können, wenn man die Berechnung dieser Grössen nur weit genug fortsetzt. Da nun die Grösse ϕ der Gleichung

$$\phi = \mu + \rho \sin \phi$$

genügen soll; so ist klar, dass ϕ die Gränze ist, welcher die Grössen

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \dots$$

sich immer mehr und mehr und, wenn man die Berechnung dieser Grössen nur weit genug fortsetzt, auch bis zu jedem beliebigen Grade nähern. Überhaupt muss man die Rechnung so weit fortsetzen, bis zwei auf einander folgende Glieder der Reihe

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \dots$$

sich in der verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht mehr von einander unterscheiden.

XI.

Bemerkungen über den elementaren Vortrag der Lehre von den Kegelschnitten.

Bei dem elementaren Vortrage der Lehre von den Kegelschnitten giebt man gewöhnlich für jede dieser drei Curven eine aus ihrer Entstehung in der Ebene hergeleitete besondere Definition, geht von dieser Definition zu der Gleichung der Curve über, und leitet aus derselben dann die verschiedenen Eigenschaften der Curve her. Besser wäre es indess vielleicht, wenn man, um Alles gleich von vorne herein unter einen allgemeinen Gesichtspunkt zu fassen, von einer allgemeinen Definition aller drei Kegelschnitte ausginge, aus dieser Definition dann eine allgemeine Gleichung dieser Curven herleitete, hierauf die verschiedenen Arten der in dieser allgemeinen Gleichung enthaltenen Curven aufsuchte, deren specielle Gleichungen entwickelte, und aus denselben dann die Eigenschaften der einzelnen Curven herleitete. Dass dieser Weg wesentliche Vorzüge vor dem, welcher gewöhnlich beim elementaren Vortrage der Lehre von den Kegelschnitten betreten wird, haben würde, scheint mir keinem Zweifel zu unterliegen; die ganze Darstellung würde dadurch offenbar an Einheit gewinnen, und sich mehr der Methode nähern, welche man in der analytischen Geometrie, wo man die Kegelschnitte gleich von vorne herein als Linien der zweiten Ordnung betrachtet und eine ganz allgemeine Gleichung derselben aufstellt, zu befolgen pflegt. Es käme nur darauf an, eine leicht verständliche allgemeine Definition der Kegelschnitte zu finden, und die Darstellung, wie es der elementare Vortrag fordert, überhaupt so einfach wie möglich zu machen. Vielleicht dürfte der folgende Weg, den ich aber bloss als einen Versuch, den so eben ausgesprochenen Bedingungen zu genügen, betrachtet zu sehen wünsche, sich Lehrern der Mathematik an Gymnasien und andern höhern Lehranstalten bei ihren Vorträgen über die so wichtige und interessante Lehre von den Kegelschnitten einigermassen empfehlen.

Allgemeine Erklärung der Kegelschnitte.

Wenn eine krumme Linie nach einem solchen Gesetze gekrümmt ist, dass die beiden Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie und einem gegebenen Punkte ein constantes Verhältniss zu einander haben; so nennt man sie einen Kegelschnitt.

Die gegebene gerade Linie heisst die *Directrix*, der gegebene Punkt heisst der *Brennpunkt* oder der *Focus* des Kegelschnitts. Den Exponenten des constanten Verhältnisses zwischen den Entfernungen eines jeden Punktes des Kegelschnitts von der Directrix und dem Brennpunkte, d. h. die Zahl, mit welcher man die Entfernung eines jeden Punktes des Kegelschnitts von der Directrix multipliciren muss, um die Entfernung des in Rede stehenden Punktes des Kegelschnitts vom Brennpunkte zu finden, welche natürlich immer als positiv anzunehmen ist, wollen wir die *Determinante* des Kegelschnitts nennen und im Folgenden immer durch *n* bezeichnen.

Aufgabe.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte zu finden.

Auflösung. Man nehme den Brennpunkt als Anfang, die durch den Brennpunkt gehende, auf der Directrix senkrecht stehende gerade Linie als Axe der Abscissen an, und bezeichne die Abscisse des Durchschnittspunkts der Directrix mit der Abscissenaxe durch a . Sind nun x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes des Kegelschnitts; so ist $x^2 + y^2$ das Quadrat der Entfernung dieses Punktes vom Brennpunkte, und $(a - x)^2$ ist offenbar das Quadrat der Entfernung des Punktes xy des Kegelschnitts von der Directrix. Daher ist nach der allgemeinen Definition der Kegelschnitte

$$1. \quad x^2 + y^2 = n^2 (a - x)^2$$

die Gleichung eines jeden Kegelschnitts.

Folgerungen aus der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte

I. Die Abscissen der Punkte, in denen die Abscissenaxe von dem Kegelschnitte geschnitten wird, erhält man, wenn man in der Gleichung 1. die Ordinate $y=0$ setzt, und mittelst der auf diese Weise erhaltenen Gleichung dann x bestimmt.

Setzt man aber in der Gleichung 1. die Grösse $y=0$; so erhält man die Gleichung

$$x^2 = n^2 (a - x)^2,$$

und folglich

$$x = \pm n(a - x) = \pm na \mp nx,$$

also

$$(1 \pm n) x = \pm na;$$

folglich

$$2. \quad x = \pm \frac{na}{1 \pm n} = \frac{na}{n \pm 1}.$$

Die doppelten Zeichen in dieser Gleichung führen sogleich auf die Bemerkung, dass *im Allgemeinen* die Abscissenaxe von dem Kegelschnitte in zwei Punkten geschnitten wird, nämlich in den beiden durch die Abscissen

$$\frac{na}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{na}{n-1}$$

bestimmten Punkten. Nur ein Fall macht eine Ausnahme hiervon; nämlich der Fall, wenn $n=1$ ist, indem für $n=1$ die Abscisse $\frac{na}{n-1}$ unendlich wird, d. h. keinen bestimmten Werth hat, und also in diesem Falle bloss die erste Abscisse

$$\frac{na}{n+1},$$

und auch bloss der durch dieselbe bestimmte Durchschnittspunkt mit der Abscissenaxe bleibt.

Hieraus sieht man nun schon, dass alle Kegelschnitte in zwei Klassen zerfallen werden:

1. in solche Kegelschnitte, welche die Abscissenaxe ein Mal schneiden, für welche die Determinante $n=1$ ist;
2. in solche Kegelschnitte, welche die Abscissenaxe zwei Mal schneiden, für welche die Determinante $n \leq 1$ ist.

Überhaupt aber werden sich offenbar die folgenden drei Arten der Kegelschnitte unterscheiden lassen:

1. Die Kegelschnitte, deren Determinante $n=1$ ist.
2. Die Kegelschnitte, deren Determinante $n < 1$ ist.
3. Die Kegelschnitte, deren Determinante $n > 1$ ist.

Jede dieser drei Arten der Kegelschnitte wollen wir nun etwas näher betrachten.

II. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, deren Determinante $n=1$ ist, ist nach 1.

$$3. \quad x^2 + y^2 = (a-x)^2.$$

Ferner ist nach dem Obigen in diesem Falle $\frac{1}{2}a$ die Abscisse des Durchschnittspunkts des Kegelschnitts mit der Abscissenaxe. Nehmen wir diesen Punkt als Anfang der Abscissen an; so müssen wir in der vorhergehenden Gleichung $\frac{1}{2}a + x$ für x setzen. Dadurch wird diese Gleichung

$$(\frac{1}{2}a + x)^2 + y^2 = (\frac{1}{2}a - x)^2,$$

oder, wenn man die Quadrate der Binominalgrößen entwickelt und aufhebt, was sich aufheben lässt,

$$4. \quad y^2 = -2ax.$$

Die Grösse a ist bekanntlich nach dem Obigen die Abscisse des Durchschnittspunkts der Directrix mit der Abscissenaxe in Bezug auf den Brennpunkt als Anfang der Abscissen. Nimmt man nun, was offenbar verstattet ist, die positiven Abscissen nur immer in der Richtung von dem Durchschnittspunkte der Directrix mit der Abscissenaxe nach dem Brennpunkte hin; so ist $-2a$ positiv, und soll, dies vorausgesetzt, durch p bezeichnet werden, wodurch die Gleichung 4. die Form

$$5. \quad y^2 = px$$

erhält.

III. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, deren Determinante $n \leq 1$ ist, ist nach 1.

$$6. \quad x^2 + y^2 = n^2(a-x)^2,$$

und die Abscissen der beiden Punkte, in denen die Abscissenaxe in diesem Falle von dem Kegelschnitte geschnitten wird, sind nach dem Obigen

$$\frac{na}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{na}{n-1}.$$

Also ist offenbar

$$\frac{1}{2} \left(\frac{na}{n+1} + \frac{na}{n-1} \right),$$

d. i.,

d. i., wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\frac{n^2 a}{n^2 - 1}$$

die Abscisse des Mittelpunkts der zwischen den beiden Punkten, in denen die Abscissenaxe von dem Kegelschnitte geschnitten wird, liegenden geraden Linie. Nimmt man diesen Punkt als Anfang der Abscissen an; so muss man in der Gleichung 6.

$$\frac{n^2 a}{n^2 - 1} + x$$

für x setzen. Dadurch wird diese Gleichung

$$\left(\frac{n^2 a}{n^2 - 1} + x\right)^2 + y^2 = n^2 \left(a - \frac{n^2 a}{n^2 - 1} - x\right)^2,$$

oder

$$\left(\frac{n^2 a}{n^2 - 1} + x\right)^2 + y^2 = n^2 \left(\frac{a}{n^2 - 1} + x\right)^2,$$

und folglich, wie man hieraus mittelst leichter Rechnung findet,

$$7. (1 - n^2)x^2 + y^2 = \frac{n^2 a^2}{1 - n^2}.$$

Diese Gleichung kann man sowohl unter der Form

$$8. \frac{(1 - n^2)^2 x^2}{n^2 a^2} + \frac{(1 - n^2) y^2}{n^2 a^2} = 1,$$

als auch unter der Form

$$9. \frac{(n^2 - 1)^2 x^2}{n^2 a^2} - \frac{(n^2 - 1) y^2}{n^2 a^2} = 1$$

darstellen. Ist nun $n < 1$, so sind die Grössen

$$\frac{n^2 a^2}{(1 - n^2)^2} \text{ und } \frac{n^2 a^2}{1 - n^2}$$

beide positiv, und man kann also

$$10. \frac{n^2 a^2}{(1 - n^2)^2} = a^2, \quad \frac{n^2 a^2}{1 - n^2} = b^2$$

setzen, wodurch die Gleichung 8. die Form

$$11. \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

erhält. Ist dagegen $n > 1$, so sind die Grössen

$$\frac{n^2 a^2}{(n^2 - 1)^2} \text{ und } \frac{n^2 a^2}{n^2 - 1}$$

beide positiv, und man kann daher

$$12. \frac{n^2 a^2}{(n^2 - 1)^2} = a^2, \quad \frac{n^2 a^2}{n^2 - 1} = b^2$$

setzen, wodurch die Gleichung 9. die Form

$$13. \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

erhält. Die Grössen a und b können, wie sogleich in die Augen fällt, sowohl im ersten, als auch im zweiten Falle immer als positiv angenommen werden.

Erklärung der drei verschiedenen Arten der Kegelschnitte.

Im Vorhergehenden haben wir schon gesehen, dass es überhaupt nur drei Arten der Kegelschnitte geben kann, jenachdem die Determinante $n=1$, oder $n<1$, oder $n>1$ ist.

Die Kegelschnitte, deren Determinante $n=1$ ist, heissen *Parabeln*, und ihre allgemeine Gleichung ist nach 5.

$$14. y^2 = px.$$

Der Punkt, in welchem das von dem Brennpunkte auf die Directrix gefällte Perpendikel von der Parabel geschnitten wird, welcher bei der vorhergehenden Gleichung als Anfang der Abscissen angenommen worden ist, heisst der *Scheitel* der Parabel. Die Grösse p heisst der *Parameter* der Parabel.

Die Kegelschnitte, deren Determinante $n<1$ ist, heissen *Ellipsen*, und ihre allgemeine Gleichung ist nach 11.

$$15. \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Die beiden Punkte, in denen das von dem Brennpunkte auf die Directrix gefällte Perpendikel von der Ellipse geschnitten wird, heissen die *Scheitel* der Ellipse. Der Mittelpunkt der die beiden Scheitel mit einander verbindenden geraden Linie, welcher bei der vorhergehenden Gleichung als Anfang der Abscissen angenommen worden ist, heisst der *Mittelpunkt* oder das *Centrum* der Ellipse. Die Grösse $2a$ heisst die *Hauptaxe*, die Grösse $2b$ die *Nebenaxe* der Ellipse.

Die Kegelschnitte, deren Determinante $n>1$ ist, heissen *Hyperbeln*, und ihre allgemeine Gleichung ist nach 13.

$$16. \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Die beiden Punkte, in denen das von dem Brennpunkte auf die Directrix gefällte Perpendikel von der Hyperbel geschnitten wird, heissen die *Scheitel* der Hyperbel. Der Mittelpunkt der die beiden Scheitel verbindenden geraden Linien, welcher bei der vorhergehenden Gleichung als Anfang der Abscissen angenommen worden ist, heisst der *Mittelpunkt* oder das *Centrum* der Hyperbel. Die Grösse $2a$ heisst die *Hauptaxe*, die Grösse $2b$ die *Nebenaxe* der Hyperbel.

Noch ist zu bemerken, dass die Gleichung der Ellipse, wenn $a=b$ ist, d. h. wenn die beiden Axen der Ellipse einander gleich sind, offenbar in die bekannte Gleichung

des Kreises übergeht, so dass also der Kreis als unter den Ellipsen enthalten betrachtet werden kann. Die Hyperbeln, für welche $a=b$ ist, d. h. deren Axen einander gleich sind, und die also dasselbe unter den Hyperbeln sind, was der Kreis unter den Ellipsen ist, nennt man *gleichseitige* Hyperbeln.

Nachdem man auf diese Weise nicht bloss die drei verschiedenen Arten der Kegelschnitte, die es geben kann, sondern auch deren einfachste Gleichungen kennen gelernt hat, lassen sich nun die Eigenschaften einer jeden einzelnen Art aus diesen Gleichungen herleiten. Diese Herleitung, die man in jedem Elementarbuche findet, gehört hier gar nicht zu unserm Zwecke. Jedoch dürfte es nicht ganz unnöthig seyn, über die Ellipsen und Hyperbeln noch Folgendes zu bemerken. Aus den Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ und } \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

dieser Linien ergibt sich nämlich leicht, dass dieselben um ihre Mittelpunkte herum völlig symmetrisch liegen, und hieraus ergibt sich ferner sogleich, dass es für jede dieser Curven ausser dem gegebenen Brennpunkte und der gegebenen Directrix noch einen zweiten Punkt und eine zweite gerade Linie auf der andern Seite des Mittelpunkts geben muss, welche übrigens gegen den Mittelpunkt und die ganze Curve überhaupt völlig dieselbe Lage haben, wie der gegebene Brennpunkt und die gegebene Directrix. Deshalb legt man jeder Ellipse und jeder Hyperbel zwei Brennpunkte und zwei Directrixen bei, nennt die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte von einander, d. h. die Entfernung eines jeden der beiden Brennpunkte von dem Mittelpunkte, die *Excentricität* der Ellipse oder Hyperbel, und bezeichnet dieselbe durch e .

Bei der Ellipse hat man zwischen den vier Grössen n , a , a , b die beiden Gleichungen

$$\frac{n^2 a^2}{(1-n^2)^2} = a^2, \quad \frac{n^2 a^2}{1-n^2} = b^2.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$17. \quad 1-n^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad n^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \quad a^2 = \frac{b^4}{a^2-b^2}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{n^2 a}{n^2-1} = - \frac{n^2 a}{1-n^2}$$

die Abscisse des Mittelpunkts der Ellipse in Bezug auf den ursprünglich gegebenen Brennpunkt derselben als Anfang der Abscissen. Also sind offenbar

$$\frac{n^2 a}{1-n^2} \text{ und } - \frac{n^2 a}{1-n^2}$$

die Abscissen der beiden Brennpunkte der Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Anfang der Abscissen. Führt man in diese Ausdrücke die vorher gefundenen Werthe von n^2 und a ein; so ergibt sich, dass $\pm \sqrt{a^2-b^2}$ die Abscissen der beiden Brennpunkte in Bezug auf den Mittelpunkt der Ellipse als Anfang der Abscissen sind, woraus sich ferner für die Excentricität unmittelbar der Ausdruck

$$18. e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

ergibt. Die Abscissen der Durchschnittspunkte der beiden Directrixen mit der Abscissenaxe in Bezug auf den Mittelpunkt der Ellipse als Anfang der Abscissen sind, wie man leicht findet,

$$\frac{a}{1-n^2} \text{ und } -\frac{a}{1-n^2},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

Ist $a=b$, d. h. geht die Ellipse in einen Kreis über; so ist nach dem Obigen $n=0$, $e=0$, und a wird unendlich. Hieraus sieht man, dass der Kreis, obgleich seine Gleichung aus dem Mittelpunkte unter der Gleichung der Ellipse aus dem Mittelpunkte enthalten ist, doch im eigentlichen Sinne nicht die Eigenschaft hat, welche oben als allgemeine Definition der Kegelschnitte zum Grunde gelegt worden ist.

Bei der Hyperbel hat man zwischen den vier Grössen n , a , a , b die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{n^2 a^2}{(n^2 - 1)^2} = a^2; \quad \frac{n^2 a^2}{n^2 - 1} = b^2.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$19. n^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}, \quad n^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}, \quad a^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{n^2 a}{n^2 - 1}$$

die Abscisse des Mittelpunkts der Hyperbel in Bezug auf den ursprünglich gegebenen Brennpunkt derselben als Anfang der Abscissen. Also sind offenbar

$$\frac{n^2 a}{n^2 - 1} \text{ und } -\frac{n^2 a}{n^2 - 1}$$

die Abscissen der beiden Brennpunkte der Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Anfang der Abscissen. Führt man in diese Ausdrücke die oben gefundenen Ausdrücke von n^2 und a ein; so ergibt sich, dass $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$ die Abscissen der beiden Brennpunkte der Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Anfang der Abscissen sind, woraus sich ferner für die Excentricität der Hyperbel unmittelbar der Ausdruck

$$20. e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ergibt. Die Abscissen der Durchschnittspunkte der beiden Directrixen mit der Abscissenaxe in Bezug auf den Mittelpunkt der Hyperbel als Anfang der Abscissen sind, wie man leicht findet,

$$\frac{a}{n^2 - 1} \text{ und } -\frac{a}{n^2 - 1},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Für die gleichseitigen Hyperbeln ist nach dem Obigen die Determinante $n = \sqrt{2}$ und $a = \frac{1}{2}a^2$.

Schlussbemerkung.

Es liegt nicht im Zwecke dieses Aufsatzes, den im Vorhergehenden behandelten Gegenstand weiter zu verfolgen. Ich bemerke daher nur noch, dass die allgemeine Definition der Kegelschnitte, von der wir im Obigen ausgegangen sind, eine in vieler Beziehung wichtige Eigenschaft der Kegelschnitte enthält, die auch zuweilen mit besonderem Vortheil bei der Auflösung von Aufgaben in Anwendung gebracht wird. So führt dieselbe z. B. zu einer sehr einfachen und eleganten Construction der Aufgabe: durch drei gegebene Punkte aus einem gegebenen Brennpunkte eine Ellipse oder Hyperbel zu beschreiben, deren erster Fall, wenn nämlich der zu beschreibende Kegelschnitt eine Ellipse ist, auch für die Astronomie nicht ohne Bedeutung ist. Man findet die Construction für diesen Fall z. B. in der *Introductio ad veram Astronomiam, seu Lectiones astronomicae habitae in schola astronomica Academiae Oxoniensis. Autore Joanne Keill. Oxoniae. 1718. pag. 432.*, einem zwar alten, aber immer noch manches Gute und Brauchbare enthaltenden Buche.

— 329 —

4. i. nach dem Vorhergehenden

Für die gleichseitigen Hyperbeln ist nach dem Obigen die Determinante

Schlussbemerkung.

Es liegt nicht im Zwecke dieser Abhandlung, den im Vorhergehenden behandelten Gegenstand weiter zu verfolgen. Ich bemerke daher nur noch, dass die allgemeine Bestimmung der Eigenschaften, von der wir im Obigen ausgegangen sind, eine in vieler Hinsicht wichtige Eigenschaft der Hyperbeln enthält, die wir hier nicht weiter verfolgen wollen. Es ist die Eigenschaft, dass die Hyperbeln eine gewisse Eigenschaft besitzen, die wir hier nicht weiter verfolgen wollen.

Berichtigungen.

Seite 35 Zeile 9 von oben statt dem lese man *den*.

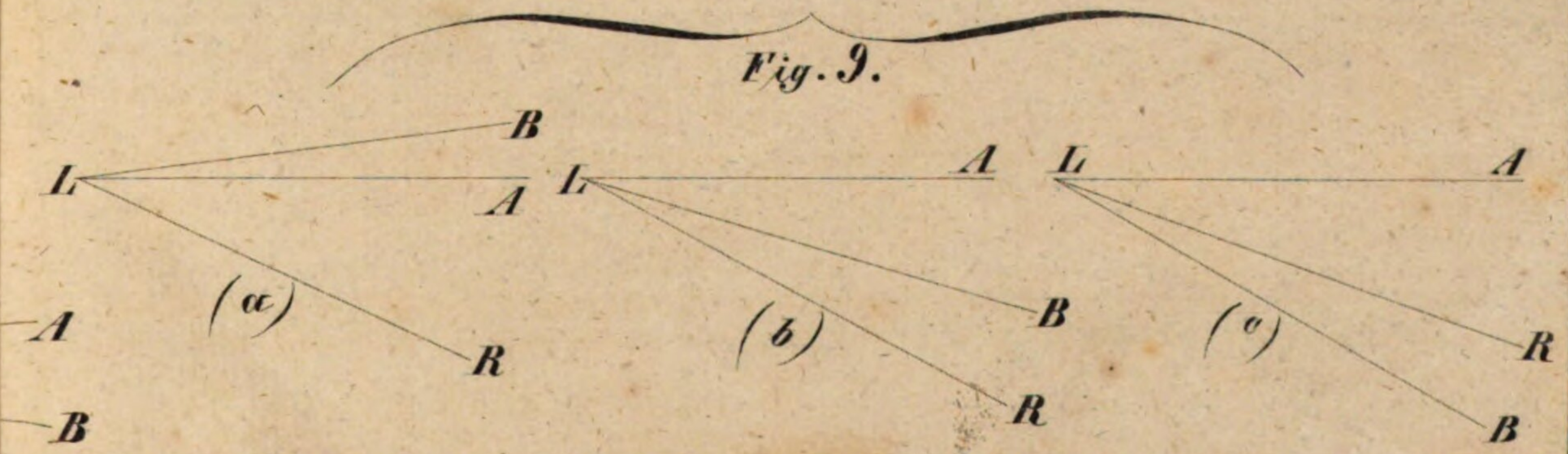
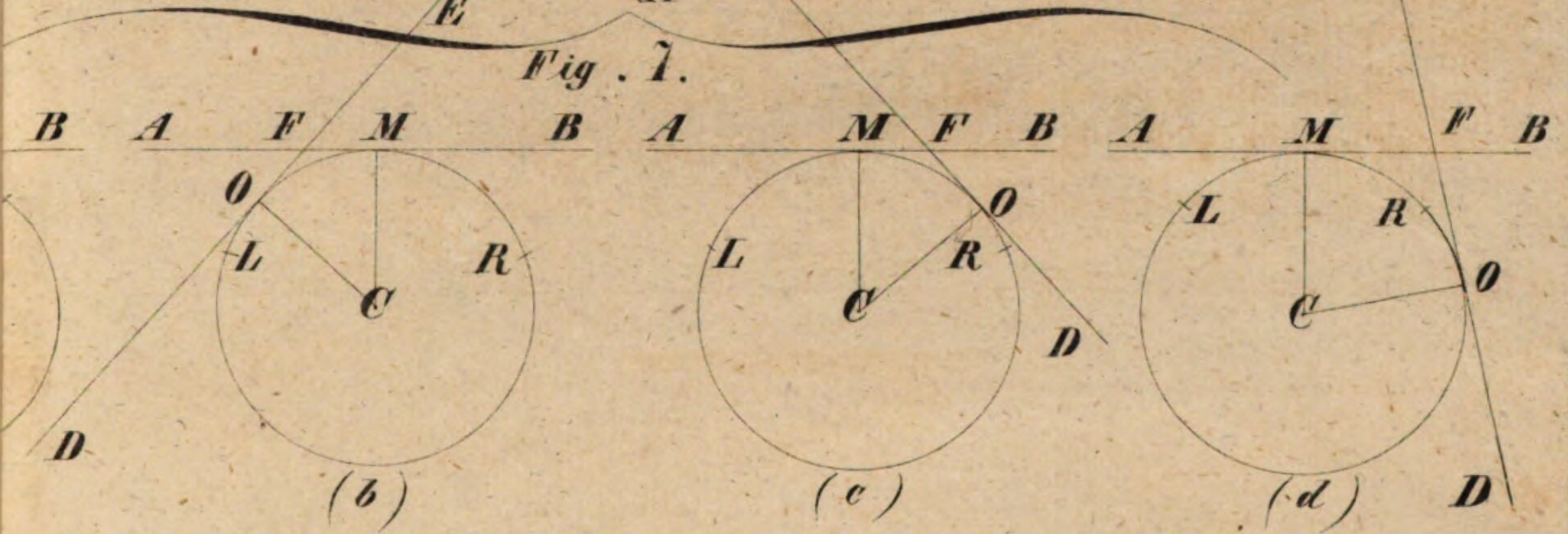
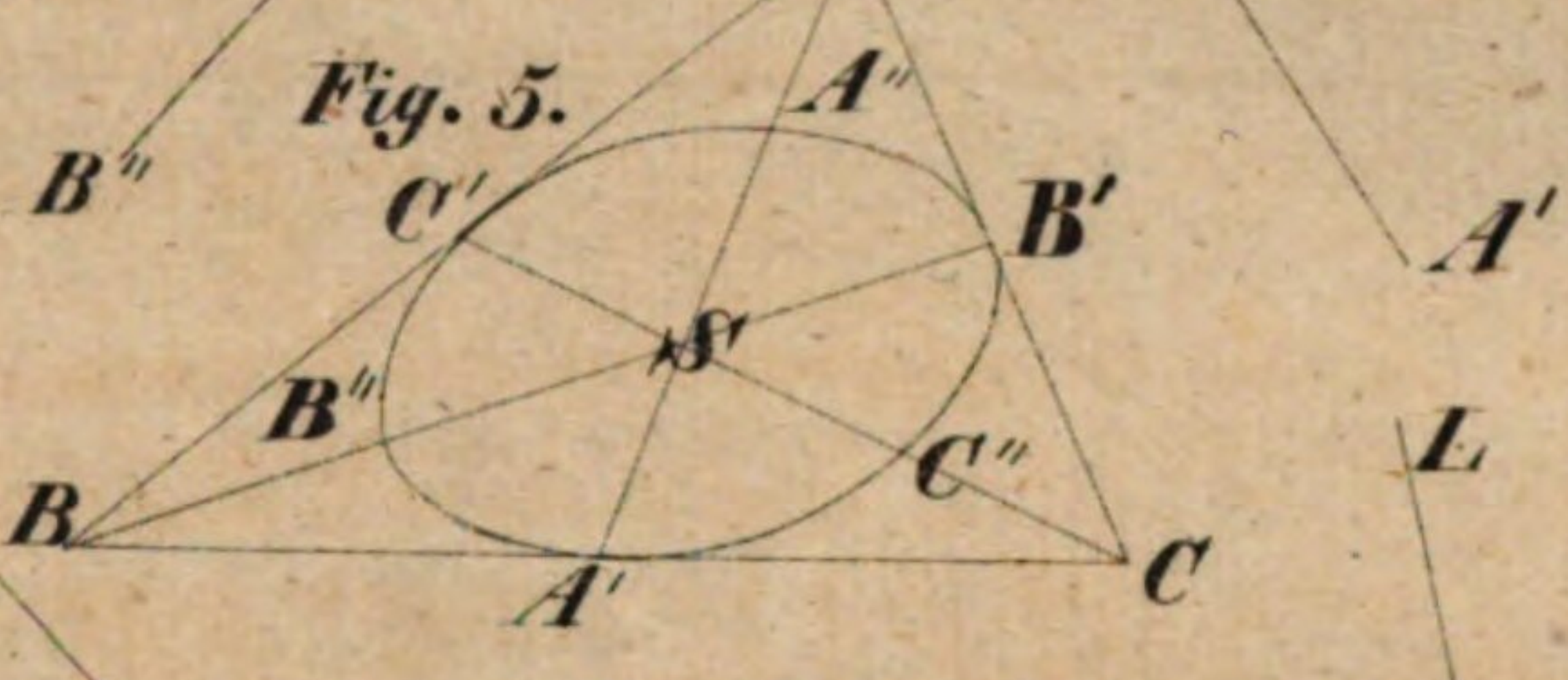
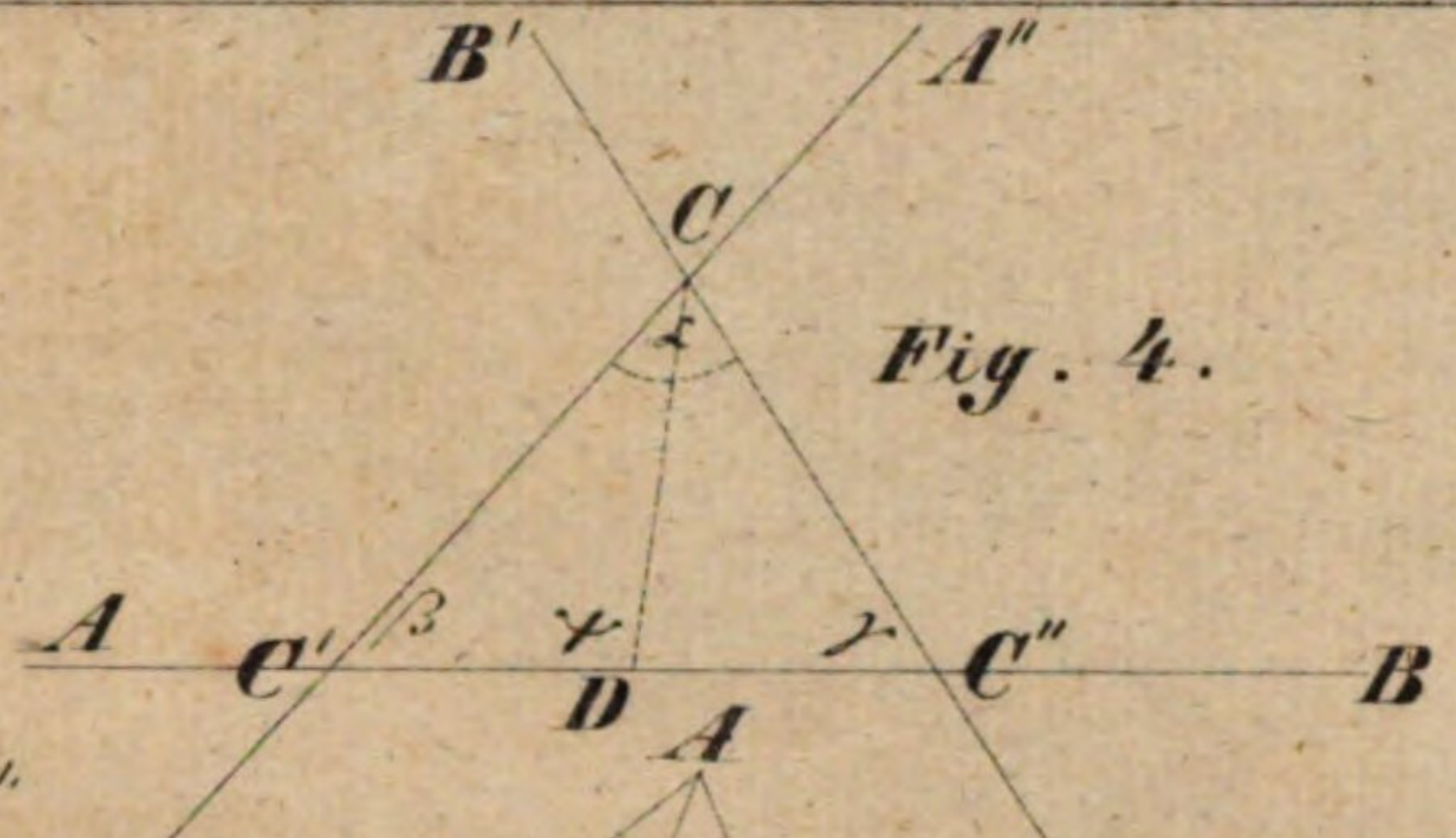
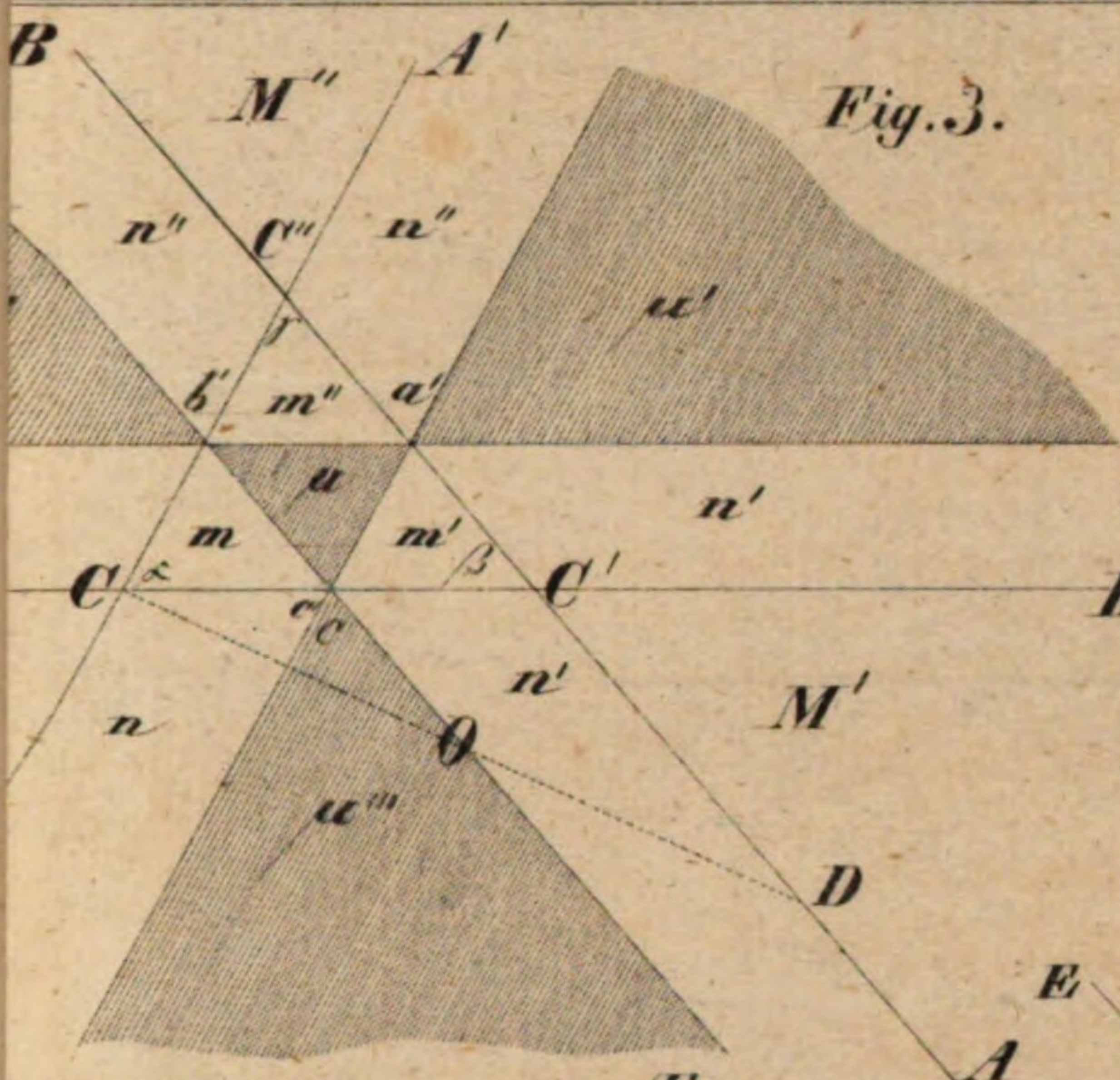
— 81 — 5 v. o. st. geodätische l. m. *geodätische*.

— 89 — 12 v. o. st. Derstellung l. m. *Darstellung*.

— 168 — 2 v. unten st. Werte l. m. *Werthe*.

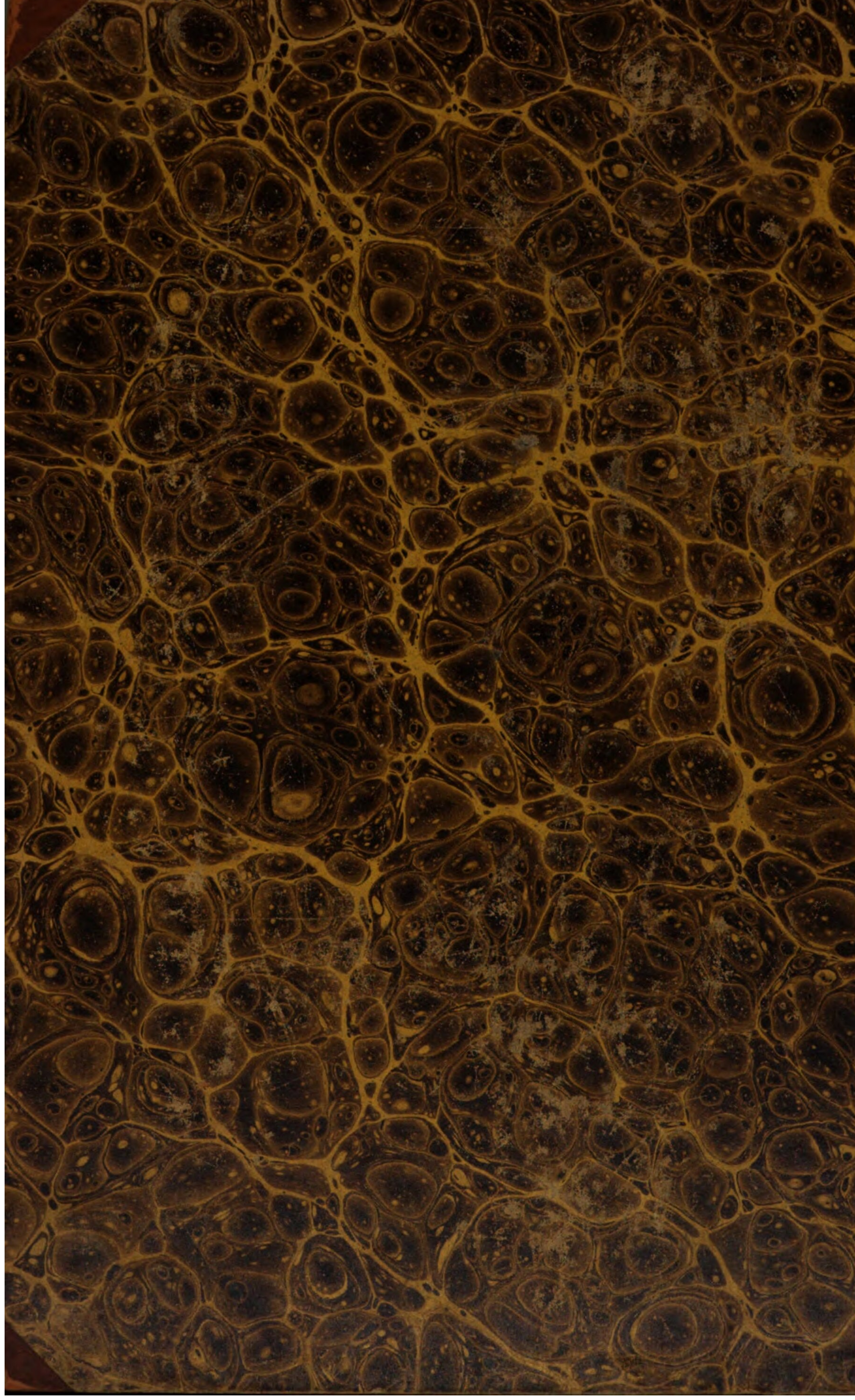
— 208 — 1 v. u. st. $\cos \theta_1 \cos \theta_2$ l. m. $\cos \theta_1 \sin \theta_2$.

— 215 — 4 v. u. st. Hauptaxe l. m. *Hauptaxe*.





$\frac{1}{2}(W-C)$
 x'
 x
 x'
 H



Grunert, Johann August,

Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik

Bd.: 1 : mit zwei Figurentafeln

Brandenburg 1838

4 Math.u. 38 n-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525594-8